

Formación del Pensamiento Matemático en Docentes de Educación Primaria:

Una Propuesta Didáctica desde los
Fundamentos del Cálculo

y las Etapas Cognitivas
Enactiva-Icónica-Simbólica (EIS)

AUTORES

-  Miluska Jackeline Madelaine Pajuelo Abanto
-  Anthony Joel Gonzáles Pacheco
-  Luis Alberto Colina Cueva
-  Áurea Elizabeth Rafael Sánchez
-  Joselito Moisés Luján Miguel
-  Marilú Rosario Cruz Blas

$$f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



$$\int_a^b f(x) dx$$



π

Σ

ISBN 978-628-97906-0-3

Formación del Pensamiento Matemático en Docentes de Educación Primaria:

Una Propuesta Didáctica desde los Fundamentos del Cálculo y las Etapas Cognitivas Enactiva-Icónica-Simbólica (EIS)

© 2026, autores de la presente obra:

Mg. Miluska Jackeline Madelaine Pajuelo Abanto

ORCID: 0000-0002-9085-1145 mipajueloa@unitru.edu.pe

Departamento de Ciencias de la Educación, Facultad de Educación y Ciencias de la Comunicación, Universidad Nacional de Trujillo (UNT), Perú

Dr. Anthony Joel Gonzáles Pacheco

ORCID: 0000-0003-0319-750X agonzalesp@unitru.edu.pe

Departamento de Ciencias de la Educación, Facultad de Educación y Ciencias de la Comunicación, Universidad Nacional de Trujillo (UNT), Perú

Mg. Luis Alberto Colina Cueva

ORCID: 0009-0004-3009-5829 icolina@unitru.edu.pe

Departamento de Ciencias de la Educación, Facultad de Educación y Ciencias de la Comunicación, Universidad Nacional de Trujillo (UNT), Perú

Dra. Áurea Elizabeth Rafael Sánchez

ORCID: 0000-0002-1943-7857 erafael@unitru.edu.pe

Departamento de Ciencias de la Educación, Facultad de Educación y Ciencias de la Comunicación, Universidad Nacional de Trujillo (UNT), Perú

Dr. Joselito Moisés Luján Miguel

ORCID: 0000-0003-1967-6468 jlujanmi@unitru.edu.pe

Departamento de Lengua y Literatura, Facultad de Educación y Ciencias de la Comunicación, Universidad Nacional de Trujillo (UNT), Perú

Dra. Marilú Rosario Cruz Blas

ORCID: 0000-0001-5740-0062 mcruzblas@unitru.edu.pe

Departamento de Ciencias de la Educación, Facultad de Educación y Ciencias de la Comunicación, Universidad Nacional de Trujillo (UNT), Perú



Editor: Nora González

Título

Formación del pensamiento matemático en docentes de educación primaria: Una propuesta didáctica desde los fundamentos del cálculo

Autores

Miluska Jackeline Madelaine Pajuelo Abanto, Anthony Joel Gonzáles Pacheco, Luis Alberto Colina Cueva, Áurea Elizabeth Rafael Sánchez, Joselito Moisés Luján Miguel, Marilú Rosario Cruz Blas

ISBN Versión Digital: 978-628-97906-0-3

Sello Editorial:

Editorial Mundo Interdisciplinario

Editor de Publicaciones y Coordinador editorial: Fitzgerald Castro – Cartagena –Colombia

Diagramación:

Daniel Castro

Portada:

Linda Luz Castro González

Prohibida la reproducción total o parcial por cualquier medio sin la autorización escrita del titular de los derechos patrimoniales

Esta obra ha sido arbitrada mediante el sistema de doble evaluación por pares ciegos y constituye un producto resultado de investigación científica

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons – Atribución – No comercial – Compartir igual 4.0 internacional / CC BY-NC-SA 4.0

<https://co.creativecommons.net/tipos-de-licencias/>



Cartagena –Colombia, Septiembre 2026

RESUMEN

El presente documento constituye una guía didáctica, diseñada como material de referencia para el taller “Desarrollo del Pensamiento Matemático”, dirigido a docentes en formación de Educación Primaria. Su propósito es fortalecer las competencias matemáticas y didácticas de los futuros docentes mediante la vivencia del enfoque de las tres etapas cognitivas de Jerome Bruner (1966): Enactiva, Icónica y Simbólica (EIS), aplicado a contenidos fundamentales del Cálculo —funciones, límite, continuidad y derivada— y articulado con las competencias, capacidades y desempeños del Currículo Nacional de Educación Básica (CNEB) del Perú, desde 1.º hasta 6.º grado de primaria. La propuesta se organiza en tres jornadas de trabajo y siete módulos temáticos, cada uno con definiciones conceptuales fundamentales, secuencias didácticas progresivas —que avanzan de la acción corporal a la representación visual y finalmente al lenguaje matemático formal— y listas diferenciadas de materiales educativos de bajo costo, mayoritariamente reciclables, que hacen el taller replicable en cualquier contexto escolar peruano. El proceso culmina con el diseño de una Unidad de Aprendizaje que integra al menos dos bloques temáticos del sílabo, una situación significativa, evidencias de aprendizaje, criterios e instrumentos de evaluación formativa. Se sostiene, como principio rector, que ningún concepto matemático debe presentarse en forma simbólica sin haber transitado antes por la experiencia corporal y la representación icónica, base cognitiva del aprendizaje significativo en la enseñanza de la matemática. La propuesta aporta a la formación inicial docente una herramienta innovadora que conecta la matemática superior con la práctica pedagógica del aula de primaria, contribuyendo a mejorar la calidad de la enseñanza del pensamiento matemático en el sistema educativo peruano.

Palabras clave: pensamiento matemático; etapas cognitivas EIS; Jerome Bruner; formación docente; educación primaria; didáctica del cálculo; currículo nacional de educación básica.

ABSTRACT

This document is an original didactic guide designed as reference material for the workshop “Development of Mathematical Thinking,” aimed at pre-service Primary Education teachers. Its purpose is to strengthen the mathematical and pedagogical competencies of future teachers through direct experience with Jerome Bruner's (1966) three cognitive stages: Enactive, Iconic, and Symbolic (EIS), applied to fundamental Calculus content —functions, limit, continuity, and derivative— and articulated with the competencies, capacities, and performance standards of Peru's National Basic Education Curriculum (CNEB), from 1st to 6th grade of primary school. The proposal is organized into three working sessions and seven thematic modules, each containing core conceptual definitions, progressive didactic sequences —moving from bodily action to visual representation and finally to formal mathematical language— and differentiated lists of low-cost, mostly recyclable educational materials that make the workshop replicable in any Peruvian school context. The process culminates in the design of a Learning Unit that integrates at least two thematic blocks of the syllabus, a meaningful situation, learning evidence, and formative assessment criteria and instruments. As a guiding principle, the proposal holds that

no mathematical concept should be introduced symbolically without first passing through bodily experience and iconic representation, a sequence considered the cognitive foundation of meaningful learning in mathematics teaching. The proposal offers pre-service teacher education an innovative tool that connects higher mathematics with pedagogical practice in the primary classroom, contributing to improving the quality of mathematical-thinking instruction within the Peruvian education system.

Keywords: mathematical thinking; EIS cognitive stages; Jerome Bruner; teacher training; primary education; calculus didactics; national basic education curriculum.

ÍNDICE DE CONTENIDOS

Resumen	4
Abstract	4
Introducción — Presentación y objetivos del taller	8
Presentación.....	8
Objetivos del taller (objetivo general y objetivos específicos).....	8
Capítulo I. Fundamentos teóricos: las etapas cognitivas de Bruner en la didáctica de la matemática	9
1.1 Las tres etapas cognitivas de Bruner en la didáctica de la matemática	9
Etapla Enactiva (Acción)	9
Etapla Icónica (Imagen).....	9
Etapla Simbólica (Lenguaje)	10
1.2 Precisión conceptual: del modelo EIS al enfoque CPA (Concreto-Pictórico-Abstracto).....	10
1.3 Hacia una cuarta capa: la IA generativa como apoyo al modelo EIS.....	10
Capítulo II. Relaciones, funciones y álgebra de funciones — Día 1	12
Módulo 1: Del Producto Cartesiano a las Funciones — ¿Para qué sirven en el aula de Primaria?	12
Definiciones: par ordenado, producto cartesiano, relación binaria, función, dominio, rango, función lineal, función cuadrática.....	13
Tabla 1. Secuencia didáctica EIS para relaciones y funciones	19
Módulo 2: Álgebra y Composición de Funciones — Conexión con Operaciones en Primaria	20
Definiciones: suma de funciones, composición de funciones, función inversa, proporcionalidad directa, proporcionalidad inversa	20
Tabla 2. Secuencia didáctica EIS para álgebra y composición de funciones	31
Materiales educativos — Día 1 (Módulos 1 y 2)	32
Capítulo III. Límite y continuidad: el pensamiento sobre el cambio — Día 2.....	33
Módulo 3: Límite — La Base del Razonamiento sobre Variación y Cambio	33
Definiciones: límite de una función, límite lateral derecho, límite lateral izquierdo, límite al infinito, asíntota horizontal, indeterminación	33
Tabla 3. Secuencia didáctica EIS para límite	44
Módulo 4: Continuidad — Razonamiento Continuo y Gestión de Datos en Primaria	46
Definiciones: continuidad en un punto, discontinuidad evitable, discontinuidad de salto, discontinuidad esencial, teorema del valor intermedio	46
Tabla 4. Secuencia didáctica EIS para continuidad	50
Materiales educativos — Día 2 (Módulos 3 y 4)	51
Capítulo IV. Derivada, graficación e integración didáctica — Día 3	52

Módulo 5: Derivada — La Tasa de Cambio que Todo Docente de Primaria Debe Comprender	52
Definiciones: tasa de cambio promedio, tasa de cambio instantánea, derivada, regla de la potencia, derivada de función compuesta, valor máximo y mínimo, función creciente/decreciente, optimización	52
Módulo 6: Gráficas de Funciones con Derivadas — Visualización Matemática en el Aula.....	62
Definiciones: análisis de una gráfica, punto de inflexión, concavidad hacia arriba, concavidad hacia abajo	62
Módulo 7: Integración Didáctica — Diseño de Unidad de Aprendizaje Articulada.....	67
Definiciones: unidad de aprendizaje (CNEB), situación significativa, desempeño de grado, los 4 procesos didácticos del área de Matemática, evaluación formativa	67
Tabla 7. Secuencia didáctica EIS para la planificación curricular	68
Materiales educativos — Día 3 (Módulos 5, 6 y 7).....	69
Resumen integrado de materiales — los tres días	70
Capítulo V. Diseño e implementación de la Unidad Didáctica “Descubrimos las reglas que gobiernan el mundo”	71
I. Datos generales de la Unidad Didáctica	71
II. Presentación y fundamentación	72
III. Situación significativa — La Gran Feria Escolar de Matemática.....	73
IV. Propósitos de aprendizaje y evidencias.....	73
4.1 Competencias y capacidades del CNEB.....	73
4.2 Desempeños por grado	74
4.3 Evidencias de aprendizaje.....	74
V. Enfoques transversales y valores	75
VI. Secuencia didáctica — los tres días	75
Día 1 · Módulo 1: Del Producto Cartesiano a las Funciones	75
Día 1 · Módulo 2: Álgebra y Composición de Funciones	76
Día 2 · Módulo 3: Límite — La Tendencia Detrás de los Datos	77
Día 2 · Módulo 4: Continuidad — ¿Por qué Algunas Gráficas Tienen Saltos?	78
Día 3 · Módulo 5: Derivada — ¿Cuándo Estamos Ganando Más?	81
Día 3 · Módulo 6: Gráficas — Cómo Leer e Interpretar Visualmente	84
Conclusiones	85
Referencias bibliográficas	86

INTRODUCCIÓN

Presentación y objetivos del taller

Fundamentación, propósito y estructura general

PRESENTACIÓN

La presente obra, concebida originalmente como guía didáctica para el taller “Desarrollo del Pensamiento Matemático” dirigido a docentes en formación de Educación Primaria, se presenta aquí en formato de libro para su publicación académica, conservando su enfoque práctico y su fundamentación teórica. El material articula, de manera progresiva y sistemática, los fundamentos matemáticos del Cálculo con la didáctica del Currículo Nacional de Educación Básica (CNEB) peruano, a través del enfoque de las tres etapas cognitivas de Jerome Bruner (1966): Enactiva, Icónica y Simbólica (EIS).

La guía se organiza en tres jornadas de trabajo y siete módulos temáticos. El Día 1 aborda Relaciones, Funciones y Álgebra de Funciones (Módulos 1 y 2); el Día 2 desarrolla Límite y Continuidad (Módulos 3 y 4); y el Día 3 integra Derivada, Graficación y Planificación Curricular (Módulos 5, 6 y 7). Cada módulo presenta las definiciones conceptuales fundamentales, su conexión con los desempeños del CNEB por grado (1.º a 6.º de primaria) y una secuencia didáctica completa con la progresión EIS, que avanza del movimiento corporal a la representación visual y finalmente al lenguaje matemático formal.

El principio rector que guía todo el material es claro: ningún concepto matemático debe presentarse de forma simbólica sin haber transitado primero por la experiencia corporal y la representación visual. Esta secuencia no es optativa: es la base cognitiva del aprendizaje significativo. El material incluye, además, las listas de materiales educativos necesarios para cada jornada, diferenciando entre materiales de reciclaje y materiales de papelería, con la finalidad de hacer el taller accesible y replicable en cualquier contexto escolar peruano.

El contenido de esta obra es de autoría de los firmantes; los términos de su reproducción y distribución quedan sujetos a lo que determine la editorial responsable de la presente publicación.

OBJETIVOS DEL TALLER

Objetivo general

Fortalecer las competencias matemáticas y didácticas de los docentes en formación de Educación Primaria, mediante la vivencia del enfoque EIS aplicado a contenidos de Cálculo y su articulación con las competencias del Currículo Nacional de Educación Básica (CNEB).

Objetivos específicos

1. Comprender los fundamentos conceptuales de funciones, límite, continuidad y derivada, y su conexión con los aprendizajes esperados en Educación Primaria según el CNEB.
2. Diseñar y ejecutar secuencias didácticas utilizando la progresión Enactiva–Icónica–Simbólica con materiales concretos de bajo costo, vinculados a situaciones reales del aula de primaria.
3. Articular los contenidos matemáticos del taller con las competencias y desempeños del CNEB, desde 1.º hasta 6.º grado de primaria, identificando la progresión de los aprendizajes por ciclo.
4. Elaborar una Unidad de Aprendizaje integrando al menos dos bloques temáticos del sílabo DPM, con situación significativa, evidencias de aprendizaje, criterios de evaluación e instrumento de evaluación formativa.

CAPÍTULO I

Fundamentos teóricos: las etapas cognitivas de Bruner en la didáctica de la matemática

Marco conceptual EIS — Enactiva, Icónica, Simbólica

LAS TRES ETAPAS COGNITIVAS DE BRUNER EN LA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

Bruner (1966) propone que todo aprendizaje matemático significativo debe transitar por tres modos de representación progresivos e interconectados. Para la formación de docentes de primaria, este modelo es esencial porque articula el cuerpo, la imagen y el símbolo en una secuencia pedagógicamente sólida. Precisión conceptual: en esta guía, el modelo EIS de Bruner (1966) se opera mediante el enfoque Concreto-Pictórico-Abstracto (CPA), la traducción didáctica del modelo bruneriano adoptada por el Ministerio de Educación de Singapur desde el Primary Mathematics Project (1979-1980) y con una correspondencia uno a uno documentada entre ambos modelos (Leong, Ho, & Cheng, 2015). El CPA ha mostrado eficacia en el desarrollo del pensamiento algebraico en distintos niveles educativos (Kurniawan, Budiyo, Sajidan, & Siswandari, 2020), aunque su aplicación más allá de la aritmética elemental —como la propuesta aquí, hacia el cálculo— sigue siendo un área de investigación incipiente (Lutfi et al., 2024). Las referencias a Calle (2021), Campos (2020) y Zapatera (2020) documentan la aplicación del método CPA/Singapur en aulas de primaria y se citan aquí como evidencia de su implementación en el aula —no como fuentes originales de la teoría de Bruner—, la cual se sustenta directamente en Bruner (1966).

- **Etapla Enactiva (Acción):**

Según Calle (2021), la etapa enactiva se centra en el uso de materiales manipulables para la enseñanza de conceptos matemáticos, lo que facilita la interacción física de los niños con el contenido. Por ejemplo, al enseñar la suma, se pueden emplear bloques o fichas para que los niños realicen operaciones con objetos tangibles. En esta fase, la utilización de materiales físicos manipulables permite una representación palpable de las situaciones planteadas, lo que es fundamental para la comprensión inicial. Las actividades típicas incluyen la lectura del problema y la identificación de sus elementos clave (Coy, Fuel, Durán y Coloma, 2024).

La hormiga aprende sobre la hoja **manipulándola**. La carga, la siente y experimenta su peso y textura a través del movimiento físico.

- **Etapla Icónica (Imagen):**

Según Campos (2017). En esta fase, los estudiantes representan los conceptos matemáticos mediante dibujos, diagramas o esquemas, lo cual actúa como un puente entre la manipulación concreta de objetos y el uso de símbolos abstractos.

En esta etapa, después de resolver una suma con bloques en la etapa concreta, los niños pueden dibujar círculos o cuadros que representan esos mismos bloques, permitiéndoles visualizar la operación sin depender de materiales físicos. Al abstraer la información mediante imágenes, los estudiantes fortalecen su comprensión y se preparan eficazmente para el siguiente nivel, que es la abstracción simbólica.

La hormiga ya no necesita tocar la hoja para saber qué es. Puede reconocerla a través de una **representación visual** o un dibujo, identificando sus rasgos característicos sin tenerla presente.

Según Zapatera (2020), la etapa abstracta constituye el nivel más avanzado del proceso, en el cual el estudiante emplea símbolos matemáticos, números y expresiones algebraicas sin la necesidad de recurrir a materiales concretos o representaciones visuales.

La hormiga utiliza **símbolos abstractos** (como la palabra "HOJA" o una fórmula química) para representar el concepto. Es el nivel más alto de abstracción, donde el conocimiento se almacena en forma de códigos o lenguaje.

BRUNER: LAS ETAPAS DEL APRENDIZAJE

1. ETAPA ENACTIVA (Acción Directa) (0-1 año approx.)



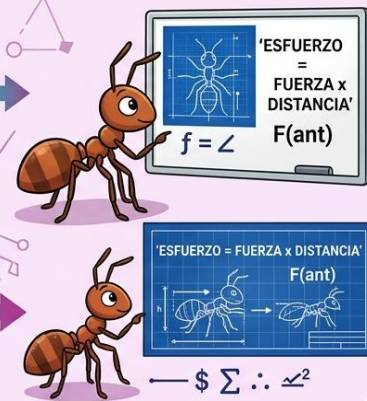
APRENDIZAJE A TRAVÉS DE LA ACCIÓN FÍSICA Y MANIPULACIÓN.
(The ant learns by rolling a stone).

2. ETAPA ICÓNICA (Imágenes Visuales) (1-6 años approx.)



REPRESENTACIÓN MEDIANTE IMÁGENES Y ESQUEMAS.
(The ant visualizes how to carry a stone through a picture).

3. ETAPA SIMBÓLICA (Símbolos Abstractos) (7 años en adelante)



USO DE LENGUAJE, NÚMEROS Y FÓRMULAS.
(The ant calculates the effort using abstract formulas).

Hacia una cuarta capa: la IA generativa como apoyo al modelo EIS

Página 10 de 88

implicaciones de la IA generativa para la educación matemática, identifica cuatro usos con mayor potencial: resolución de problemas, tutoría y retroalimentación, adaptación de tareas al nivel del estudiante, y apoyo a la planificación docente —los cuatro compatibles con la progresión EIS de esta guía.

En esta propuesta, la IA generativa puede emplearse en la etapa icónica —por ejemplo, para generar variaciones de una representación gráfica o proponer contextos alternativos a la 'feria escolar' adaptados a la realidad de cada aula— y en la planificación docente de la Unidad de Aprendizaje del Capítulo V, siempre bajo la revisión crítica del profesor. Se recomienda a los docentes en formación validar todo contenido generado por IA antes de llevarlo al aula, dado que estas herramientas pueden producir errores matemáticos no evidentes (Kim et al., 2026; Anda y Medina, 2024).

Veamos las siguientes actividades

ETAPA	ENACTIVA (Cuerpo en movimiento)	ENACTIVA (Mesa de trabajo)	ICÓNICA (Imágenes)	SIMBÓLICA (Lenguaje formal)
Actividades	El estudiante usa su propio cuerpo para vivir el concepto: camina, salta, forma filas, agrupa personas. El movimiento ES el concepto.	Manipula objetos concretos en la mesa: semillas, tapas, bloques, tarjetas. Las manos median el concepto.	Dibuja, esquematiza, grafica. El concepto se representa mediante imágenes, diagramas o gráficos.	Escribe números, fórmulas, notación matemática. El concepto se expresa con lenguaje matemático formal.

LAS 3 ETAPAS EIS — LA BASE DE TODA BUENA CLASE DE MATEMÁTICA				
ETAPA 1: ENACTIVA (HACER) El cuerpo ES el concepto El estudiante vive el concepto con su cuerpo. Primero en movimiento por el espacio (patio, aula); luego manipulando objetos reales en su mesa de trabajo. Para aprender FUNCIÓN: los alumnos forman pares (dato de entrada → dato de salida) y caminan formando la 'regla'. Para aprender PATRON: palmadas FUERTE-suave-FUERTE-suave... el cuerpo siente el ritmo antes de escribirlo.				
ETAPA 2: ICÓNICA (VER) El dibujo representa el concepto El estudiante dibuja, esquematiza o grafica lo que vivió en el cuerpo. Las imágenes conectan la experiencia física con el símbolo matemático. Para aprender FUNCIÓN: dibuja el diagrama de flechas o grafica puntos en papel cuadriculado. Para aprender PATRON: dibuja la secuencia de figuras o de colores en su cuaderno.				
ETAPA 3: SIMBÓLICA (ESCRIBIR) El símbolo expresa el concepto Recién aquí el estudiante usa letras, números y fórmulas. Este paso SOLO tiene sentido si ya pasó por las dos etapas anteriores. Para aprender FUNCIÓN: escribe $f(x) = 2x + 1$ y calcula $f(3) = 7$. Para aprender PATRON: escribe la regla general '$a_n = a_1 + (n-1)d$' para progresión aritmética.				

REGLA DE ORO — No te la saltes nunca

NUNCA presentes un concepto matemático en forma simbólica (fórmula, letra, número) sin antes haberlo vivido corporalmente (enactiva) y dibujado (icónica). Si un niño de primaria todavía no ha tocado, movido o dibujado el concepto, no está listo para la fórmula. Respetar este orden es la diferencia entre un docente que 'explica' y un docente que 'enseña'.

CAPÍTULO II

Relaciones, funciones y álgebra de funciones

Unidad I del sílabo DPM · Día 1 · Módulos 1 y 2

DÍA 1

Relaciones, Funciones y su Didáctica en Educación Primaria

Unidad I del sílabo DPM /Competencias CNEB: Regularidad, equivalencia y cambio · Cantidad

MÓDULO 1: Del Producto Cartesiano a las Funciones — ¿Para qué sirven en el aula de Primaria?

¿Por qué necesito aprender esto?

Cuando un niño de 5.º grado llena una tabla como 'si compro 1 cuaderno pago S/ 3, si compro 2 pago S/ 6, si compro 3 pago S/ 9...' está trabajando con funciones sin saberlo. Tu trabajo como docente es ayudarlo a descubrir la REGLA que hay detrás de esa tabla. Para eso, primero TÚ necesitas entender qué es una función desde sus bases.

La investigación en formación docente respalda directamente este punto de partida: Wilkie (2014) encontró que muchos profesores de primaria en ejercicio tienen un conocimiento limitado para enseñar el pensamiento funcional en álgebra, en particular para reconocer la estructura de una función detrás de una tabla o un patrón. Slavičková y Vargová (2018) reportan un patrón similar en futuros docentes: dominan el cálculo simbólico de funciones, pero no siempre logran traducirlo a un razonamiento funcional aplicable al aula. Por ello, este módulo prioriza que el propio docente en formación transite primero por las etapas EIS antes de enseñarlas.

DEFINICIONES CONCEPTUALES FUNDAMENTALES

Par ordenado

(a, b): par formado por dos elementos donde el orden importa.
(a, b) $\neq$ (b, a) salvo que $a = b$.

Dos datos que van juntos Y en un orden que importa. Es como decir: '(primero esto, después esto otro)'. El orden SÍ cambia el significado.

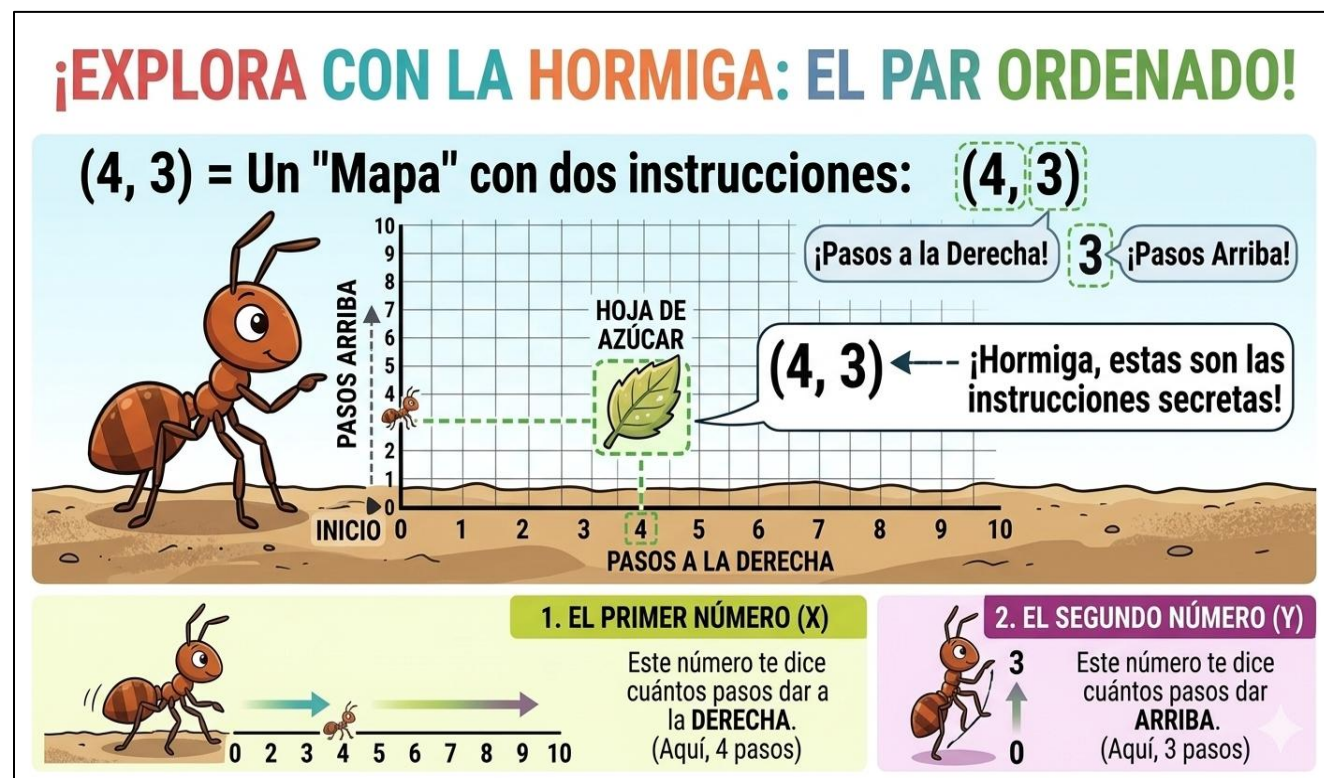
Ejemplo 1: (Ana, 1.25 m) es el par (nombre, talla). Si lo escribes al revés (1.25 m, Ana) ya no tiene sentido como dato.

Ejemplo 2: En un mapa, el punto (3, 5) no es lo mismo que el punto (5, 3). Uno está en un lugar distinto.

En primaria: cuando los niños organizan datos en tablas de doble columna, están usando pares ordenados sin saberlo.

Figura 2

Explora con la hormiga: el par ordenado



Nota. Elaboración propia basada en Bruner (1966).

1. **El primer número (4):** Es como caminar por el suelo del jardín hacia la derecha.
2. **El segundo número (3):** Es como trepar por una ramita hacia arriba

Producto Cartesiano

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Conjunto de todos los pares ordenados posibles entre los elementos de A y B.

En primaria: organizar datos en tablas de doble entrada.

Figura 3

Explora con la hormiga: el producto cartesiano



1. Los dos grupos (Conjuntos)

Para que ocurra el "encuentro mágico", necesitamos dos equipos:

- **Conjunto X (Letras):** Son las dueñas del camino horizontal (el suelo). Tenemos a {A, B, C, D}.
- **Conjunto Y (Números):** Son los dueños del camino vertical (la pared). Tenemos a {1, 2, 3, 4}.

2. ¿Qué es el Producto Cartesiano aquí?

El producto cartesiano ($X \times Y$) es el conjunto de **todas las casillas de la tabla**. No falta ninguna. Es el resultado de cruzar cada letra con cada número.

Relación binaria

Subconjunto $R \subseteq A \times B$. Establece una correspondencia entre elementos de dos conjuntos.

Cuando un elemento de un grupo se conecta con uno o más elementos de otro grupo. Es como un hilo que une dos cosas.

Ejemplo 1: 'Cada alumno tiene una nota' conecta el grupo {alumnos} con el grupo {notas}. Eso es una relación.

Ejemplo 2: 'Cada figura geométrica tiene un número de lados' relaciona figuras con números.

En primaria (1.º-2.º): relacionar animales con su sonido, figuras con su color, números con su nombre.

Figura 4

Explora con la hormiga: la relación binaria



Producto Cartesiano tiene 16 parejas (todas las casillas). Pero si inventamos una regla: "Solo las parejas que tienen un dibujo", nuestra Relación Binaria sería este grupo selecto:

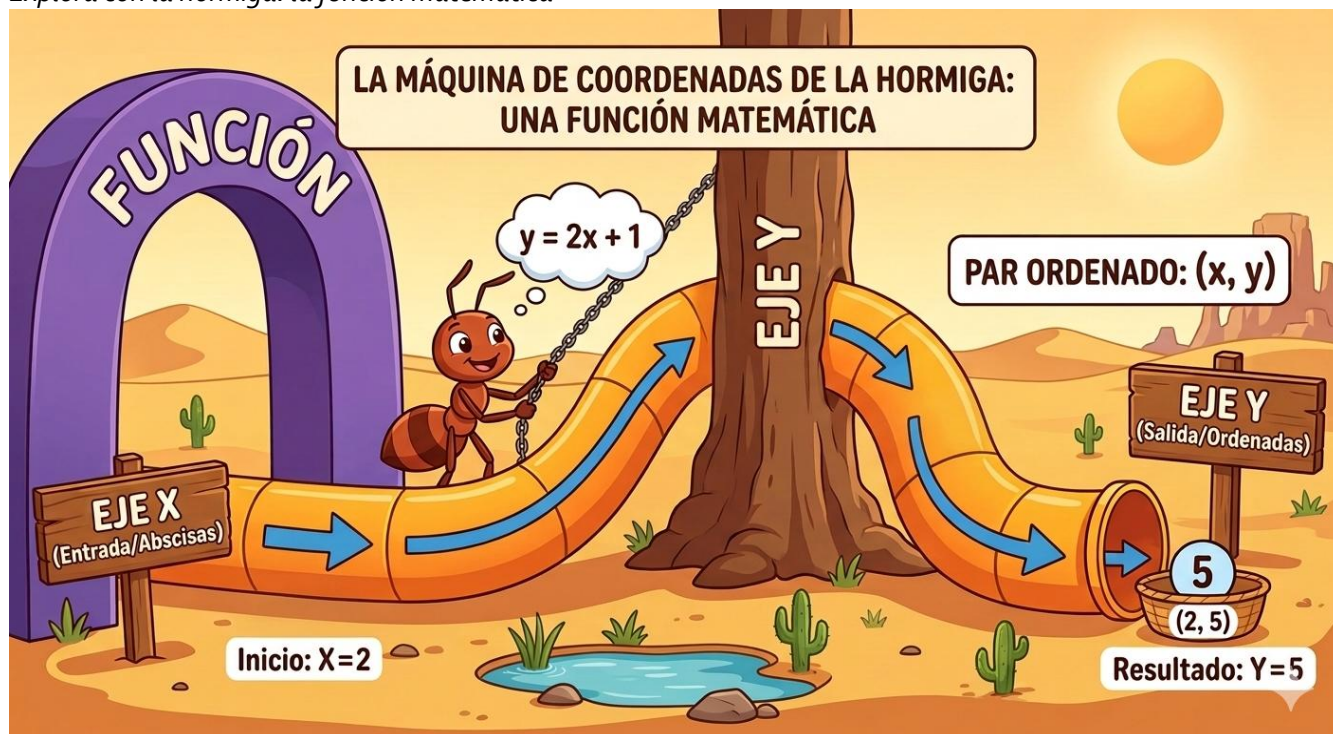
- (A, 1) - El pastel 🍰
- (B, 2) - La canasta de picnic 🧺
- (C, 3) - La manzana 🍏
- (D, 1) y (D, 4) - Las galletas 🍪

Función	f: $A \rightarrow B$ es una relación donde a cada elemento del dominio le corresponde exactamente un elemento del rango. Regla de correspondencia única. En primaria: 'la regla que convierte metros en centímetros'. Una relación ESPECIAL donde cada elemento de entrada tiene UNO Y SOLO UN elemento de salida. Como una máquina: metes una cosa, siempre sale la misma cosa. Ejemplo 1: 'El precio de los cuadernos.' Si 1 cuaderno cuesta S/ 3, SIEMPRE cuesta S/ 3. No puede costar a veces S/ 3 y a veces S/ 5. Eso es función. Ejemplo NO función: 'La nota de un alumno.' Un alumno podría tener notas distintas en distintas pruebas. No es función si la misma entrada da salidas diferentes. En primaria (5.º-6.º): tablas de proporcionalidad, reglas de correspondencia, patrones numéricos.
-----------------------	---

Dominio	Dom(f): conjunto de todos los valores de entrada (x) para los que la función está definida. En primaria: los números que 'entran' a una máquina de funciones. El conjunto de todos los valores que pueden ENTRAR a la función. Los datos de entrada permitidos. Ejemplo cotidiano: Si la función es 'precio de cuadernos = \$/ 3 x cantidad', el dominio son los números enteros positivos (no puedes comprar -2 cuadernos ni 1.5 cuadernos). Ejemplo visual: en una tabla T, la columna de la IZQUIERDA es el dominio. En primaria: los niños aprenden esto cuando preguntan '¿qué valores puedo poner en esta tabla?'
Rango o recorrido	Ran(f): conjunto de todos los valores de salida (y) que la función puede producir. En primaria: los resultados que 'salen' de la máquina. El conjunto de todos los valores que pueden SALIR de la función. Los resultados posibles. Ejemplo cotidiano: Si entran 1, 2, 3, 4 cuadernos, salen \$/ 3, 6, 9, 12. Esos valores de salida son el rango. Ejemplo visual: en una tabla T, la columna de la DERECHA es el rango. En primaria: los niños los ven como 'los resultados de la regla'.

Figura 5

Explora con la hormiga: la función matemática



- **Paso 1 (Entrada - Eje X):** La hormiga elige un número del suelo (las abscisas) y lo mete en la máquina. Este es el **Dominio**.
- **Paso 2 (La Magia - Función):** Dentro de la máquina, el número cambia según una regla secreta.
- **Paso 3 (Salida - Eje Y):** El nuevo número sale por la rampa vertical. Este es el **Rango**.
- **Paso 4 (El Nombre):** Al final, unimos la entrada con la salida para darle su "nombre completo" a la dirección: el **Par Ordenado (X, Y)**.

Función lineal

$f(x) = mx + b$. Función de primer grado. Su gráfica es una línea recta. m es la pendiente (tasa de cambio) y b es la ordenada al origen. ' m ' dice cuánto sube o baja por cada paso, y ' b ' es donde corta el eje vertical.

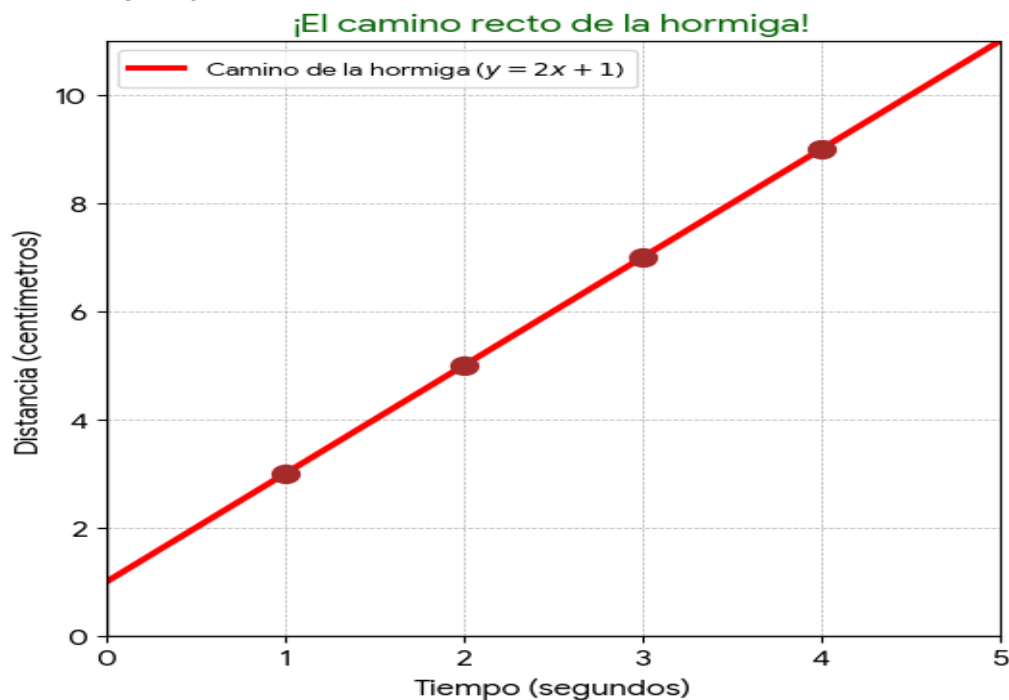
Ejemplo simple: $f(x) = 3x$ (precio de cuadernos). $m=3$ significa que por cada cuaderno adicional el precio sube S/ 3.

Ejemplo con b : $f(x) = 3x + 2$ podría significar 'S/ 2 de delivery fijo más S/ 3 por cada cuaderno'.

En primaria (5.º-6.º): proporcionalidad directa y tablas de función. La gráfica es una línea recta que pasa (o no) por el origen.

Figura 6

Explora con la hormiga: la función lineal



Imagínate que una hormiga está caminando sobre un piso cuadrículado. Una **función lineal** es simplemente la regla que nos dice qué tan rápido se mueve y hacia dónde va, pero con una condición especial: ¡la hormiga nunca puede doblar! Siempre debe caminar en una **línea recta**.

Aquí tienes los puntos clave para entenderla:

- **El camino recto:** Si dibujas todos los lugares por donde pasa la hormiga, siempre verás una línea derecha, nunca curvas ni zigzags.
- **El paso constante (Pendiente):** Si por cada paso que da hacia adelante (en el eje X), siempre sube la misma cantidad de cuadritos (en el eje Y), eso es la **pendiente**. Es como la "inclinación" de su camino.
- **El punto de partida (Ordenada al origen):** Es el lugar exacto donde la hormiga cruza la línea vertical del centro. Nos dice desde qué "altura" empezó su recorrido.

Ejemplo de la hormiga

Si la regla es $y=2x + 1$:

La hormiga empieza en el número **1** de la línea vertical.

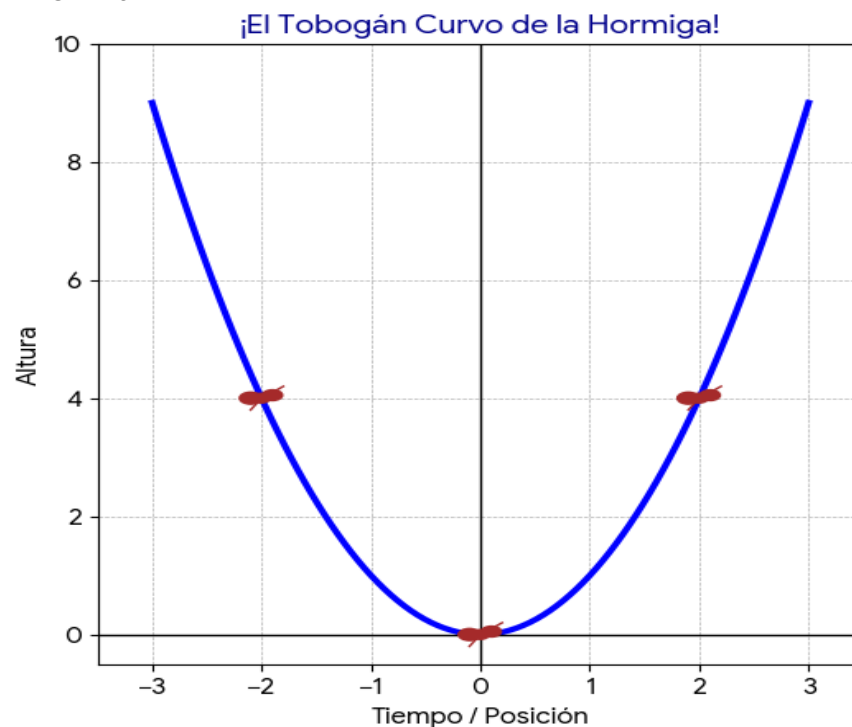
1. Por cada paso que da a la derecha, sube **2** cuadritos.
2. Si unes esos puntos con una regla, verás su camino infinito.

Función cuadrática

$f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$. Su gráfica es una parábola. En primaria: representa situaciones de área (lado $\times$ lado = área).

Figura 7

Explora con la hormiga: la función cuadrática



La Hormiga en el Tobogán (Función Cuadrática)

La función cuadrática no es una línea recta, sino una curva llamada **parábola**.

- **¿Qué pasa aquí?:** A diferencia de la función lineal, aquí la distancia no aumenta de forma igual. Por cada segundo que pasa, la hormiga gana muchísima más velocidad. ¡Es como si tuviera un motor!
- **La forma de "U":** El camino se ve como una curva. Si la hormiga sube y luego baja (o al revés), dibuja esa forma de columpio o montaña.
- **El punto más bajo (Vértice):** Es el lugar donde la hormiga deja de bajar y empieza a subir, o donde da la vuelta.

Tabla 1:

Secuencia didáctica con enfoque en las etapas EIS para el aprendizaje de relaciones y funciones.

ETAPA	ENACTIVA Cuerpo en movimiento	ENACTIVA Mesa de trabajo	ICONICA Dibujos e imágenes	SIMBOLICA Letras y números
Que hacen los estudiantes	ACTIVIDAD CORPORAL: 'La Maquina Humana' Un alumno es la ENTRADA (dice un numero), otro es la REGLA (ej: dobla el numero) (+3, x2), un tercero es la SALIDA (dice el resultado). Se mueven por el aula formando pares. La clase adivina la regla. Luego en el patio forman pares fisicos (par ordenado vivo) tomándose de la mano y cambiando de lugar.	CON OBJETOS EN LA MESA: Usando tapas de botellas y fichas de carton, construyen el diagrama de flechas. La cuerda/lana une cada entrada con su salida. Llenan la tabla T con semillas: frijoles=entrada, piedritas=salida. Verifican la regla con cada par concreto.	CON DIBUJOS: Dibujan el diagrama de flechas en su cuaderno. Grafican los puntos en papel cuadriculado. Conectan los puntos y observan si forman una linea recta. Colorean la linea y etiquetan los ejes. Visualizan la 'forma' de la función: ¿es línea recta? ¿sube o baja?	CON SIMBOLOS: Escriben la notacion: f: $A \rightarrow B$ $f(x) = 3x$ $f(1)=3$, $f(2)=6$... Identifican dominio y rango con llaves. Conectan con CNEB 5-6 grado. Escriben la notación f: $A \rightarrow B$, $f(x) = 2x + 1$. Identifican dominio y rango con llaves {}. Usan la 'máquina de funciones': $f(3) = 2(3)+1 = 7$.

1.º y 2.º	patrones de repetición (ABAB) como función de posición. Patrones de repetición (rojo-azul-rojo-azul...). El niño continua y crea secuencias. Aun no usa la palabra 'función' pero vive la idea de regla.	ENACTIVA: palmadas con ritmo. ICONICA: colorea la secuencia. SIMBOLICA: escribe R-A-R-A.	Bloques de colores reciclados, tapas de botellas pintadas.
3.º y 4.º	Tablas de multiplicar como funciones $f(x)=nx$. relación entre operaciones. Proporcionalidad simple.	ENACTIVA: filas de alumnos representan la tabla del 3. ICONICA: tabla T dibujada. SIMBOLICA: $n \times 3 =$ resultado.	Fichas de cartón, geoplano, semillas para contar.
5.º	Proporcionalidad directa $f(x) = kx$ y reglas de correspondencia. Identificar la regla en tablas. Primeros graficos de puntos.	ENACTIVA: mercadito escolar (precios). ICONICA: grafica de puntos en papel cuadriculado. SIMBOLICA: $f(x) = kx$.	Papel cuadriculado A4, regla, fichas de precio recicladas.

6.º	Funciones lineales con pendiente. Gráficas en plano cartesiano. Interpretar incrementos.	ENACTIVA: caminar a diferentes velocidades (tasa de cambio). ICONICA: graficar distancia vs tiempo. SIMBOLICA: $f(x) = mx + b$.	Papel cuadriculado A3, plumones de colores, cinta métrica.
-----	--	---	--

Nota. Elaboración propia basada en el enfoque del aprendizaje por descubrimiento de Bruner (1966).

MÓDULO 2: Álgebra y Composición de Funciones — Conexión con Operaciones en Primaria

¿Por qué necesito aprender esto?

Cuando un niño de 4.º aprende que multiplicar por 6 es lo mismo que multiplicar por 2 y luego por 3, está usando sin saberlo la COMPOSICIÓN de funciones. Cuando descubre que dividir 'deshace' la multiplicación, está usando la FUNCIÓN INVERSA. Entender estos conceptos a fondo te permitirá enseñar las operaciones de primaria con mucho más sentido.

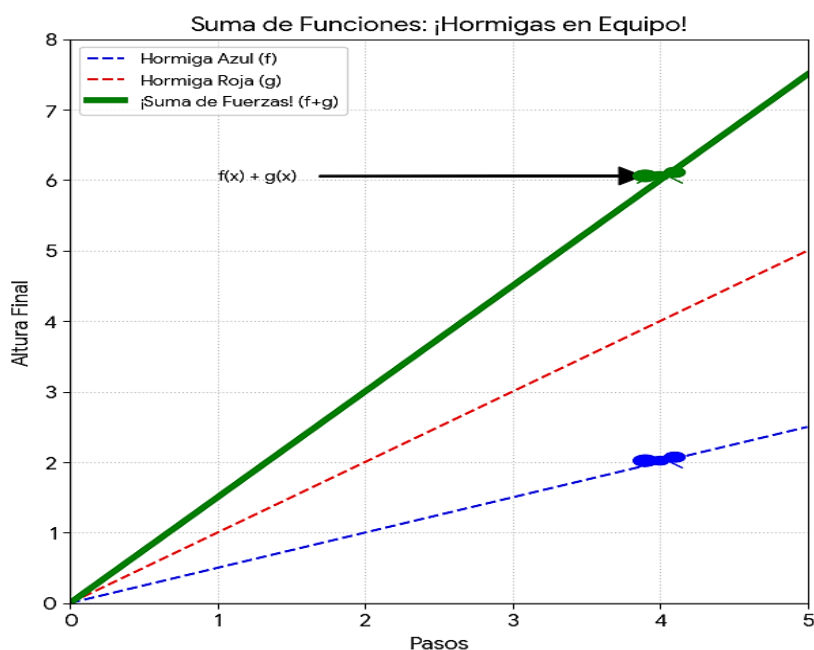
DEFINICIONES CONCEPTUALES FUNDAMENTALES

Suma de funciones

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$. Se suman los valores de salida para cada entrada x . En primaria: sumar el precio de dos productos con precios variables según cantidad.

Figura 8

Explora con la hormiga: la suma de funciones



El Equipo de Hormigas

Imagina que tenemos dos hormigas amigas:

1. **Hormiga Azul (f):** Camina por una rampa bajita.
2. **Hormiga Roja (g):** Camina por otra rampa un poco más inclinada.
¿Qué es la suma de funciones? (f+g)

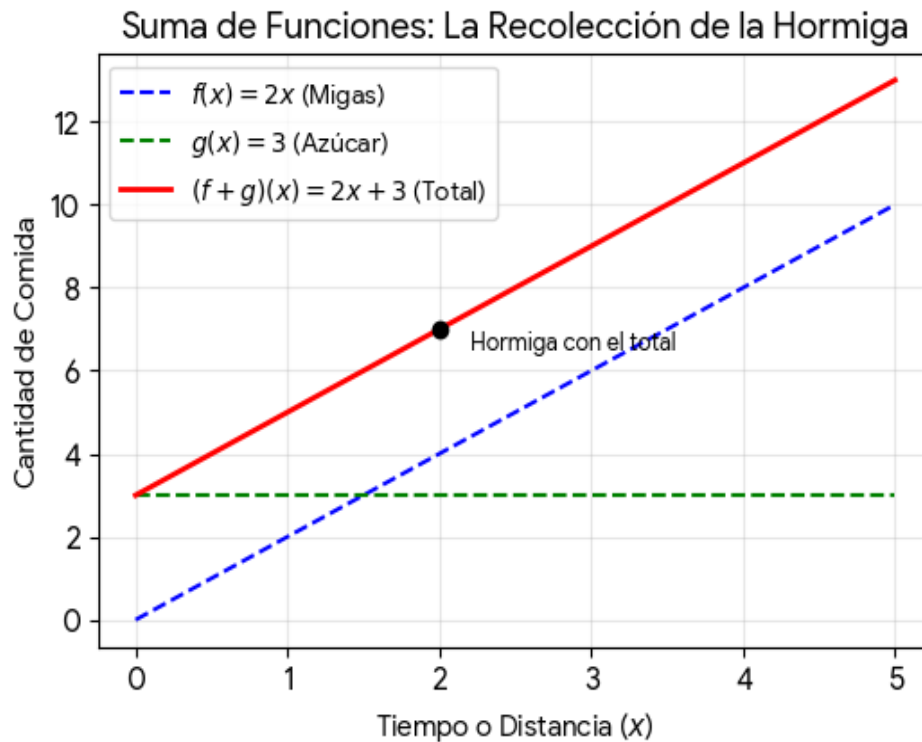
Es como si una tercera hormiga se subiera **en los hombros** de la primera. La altura final es la suma de las alturas de las dos hormigas anteriores.

Si la Hormiga Azul está a 2 metros de altura y la Hormiga Roja a 3 metros, ¡la Hormiga Suma estará a **5 metros!** (2+3=5)

Otro ejemplo:

Figura 9

Explora con la hormiga: la suma de funciones



Aquí tienes un ejemplo sencillo de cómo sumar dos funciones, usando a nuestra amiga la hormiga para visualizarlo.

Imagina que una hormiga está recolectando comida:

1. **Función $f(x)$:** Representa las migas de pan que encuentra, por ejemplo: $f(x) = 2x$.
2. **Función $g(x)$:** Representa los granos de azúcar que encuentra, por ejemplo: $g(x) = 3$

Paso 1: Definir la suma

Para saber el total de comida que la hormiga lleva al hormiguero, simplemente sumamos ambas funciones:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

Paso 2: Sustituir y resolver

Sustituimos los valores de nuestras funciones:

$$(f + g)(x) = (2x) + (3)$$

$$(f + g)(x) = 2x + 3$$

¡Y listo! El resultado final es una nueva función que representa el total recolectado por la hormiga.

Composición de funciones

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Se aplica primero g y luego f al resultado. La salida de una función es la entrada de la otra

Aplicar una función, y luego aplicar OTRA función al resultado que obtuviste. Es como pasar por dos máquinas seguidas.

Ejemplo cotidiano: Primero la MAQUINA 1 'multiplica por 2'. Luego la MAQUINA 2 'suma 3'. Si entras con el número 5: $5 \rightarrow \times 2 \rightarrow 10 \rightarrow +3 \rightarrow 13$.

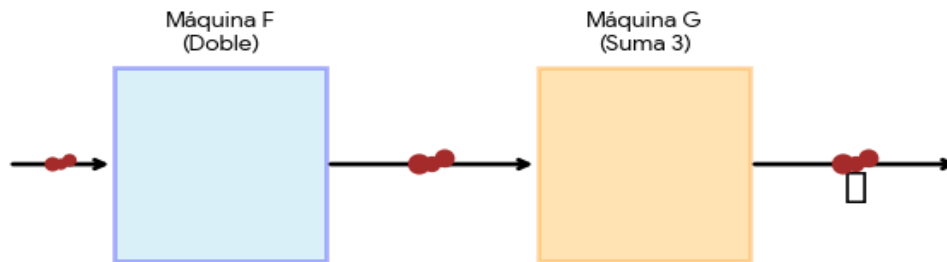
En lenguaje matemático: $(f \circ g)(5) = f(g(5)) = f(10) = 13$.

En primaria (3.º-4.º): 'primero multiplico y luego sumo' es exactamente una composición de funciones.

Figura 10

Explora con la hormiga: la composición de funciones

Composición: $g(f(x))$ – ¡El Relevé de la Hormiga!



La Hormiga en la Fábrica de Dulces

Imagina que nuestra hormiga trabaja en una fábrica donde hay dos máquinas:

1. Máquina F (El Saltador): Esta máquina toma a la hormiga y la hace saltar al doble de su altura. ($f(x)=2x$)
 2. Máquina G (El Cohete): Esta máquina toma lo que sale de la anterior y le suma 3 propulsores mágicos. ($g(x)=x+3$)
 3. ¿Qué es la composición?
 4. Es cuando metemos a la hormiga en la Máquina F y, según sale, la metemos directamente en la Máquina G.
- Si la hormiga mide 1 cm...
 - Primero pasa por F: ¡Ahora mide 2 cm!
 - Luego pasa por G: ¡Se le suman 3 propulsores y llega a 5!

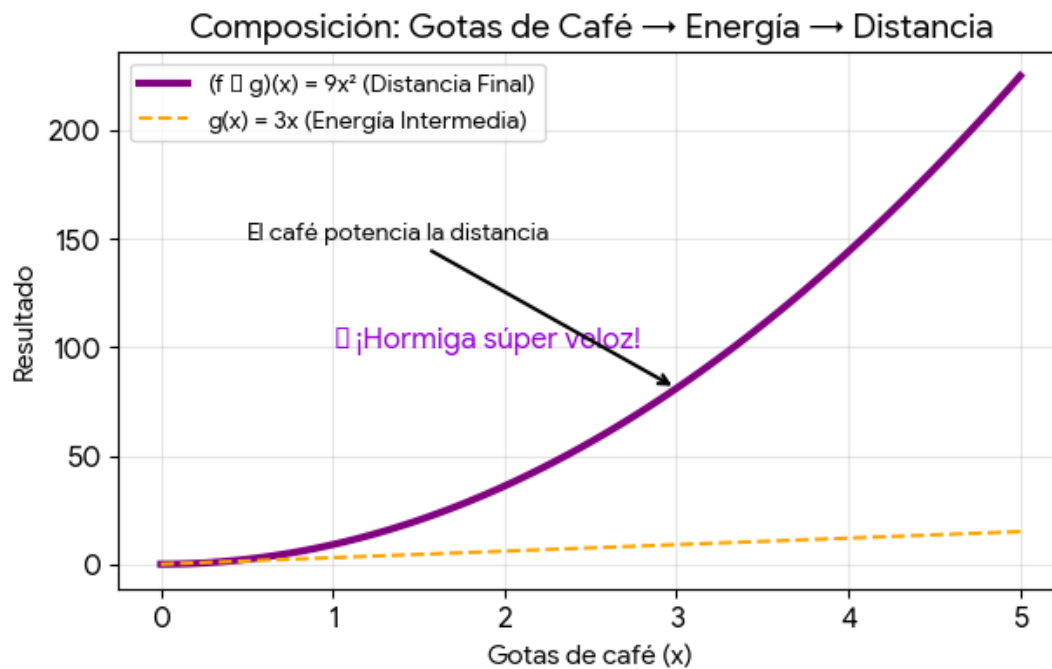
En matemáticas se escribe así:

Es como decir: "Haz lo primero y, con ese resultado, haz lo segundo".

Ejemplo:

Figura 11

Explora con la hormiga: ejemplo de composición de funciones



¡Claro! Vamos con otro de **composición**, pero esta vez pensemos en la **velocidad** de la hormiga.

Imagina este proceso en cadena:

1. **Función $g(x)$:** La hormiga toma x cantidad de café (gotas). La función es $g(x) = 3x$ (triplica su energía).
2. **Función $f(x)$:** La distancia que recorre según su energía (x) es $f(x) = x^2$.

La Composición $(f \circ g)(x)$

Aquí, la salida de las gotas de café (g) entra directamente a la función de distancia (f).

El cálculo paso a paso:

1. Tenemos $f(x) = x^2$.
2. Metemos $g(x)$ dentro de esa x :

$$f(g(x)) = (3x)^2$$

3. **Resultado:** $(f \circ g)(x) = 9x^2$.

¿Qué pasó aquí?

La hormiga no solo camina más, sino que al combinar las funciones, su rendimiento crece de forma **cuadrática** (mucho más rápido) porque una función potencia a la otra.

Función inversa

f^{-1} : si f lleva $a \rightarrow b$, entonces f^{-1} lleva $b \rightarrow a$. 'Deshace' la función original..

Ejemplo cotidiano: Si f multiplica por 3 ($f(x)=3x$), su inversa divide entre 3 ($f^{-1}(x)=x/3$). Si entras 4 $\rightarrow$ sale 12. La inversa: entras 12 $\rightarrow$ sale 4.

En primaria: si multipliqué por 3 para llegar al resultado, divido entre 3 para regresar al inicio

En primaria: la división es la inversa de la multiplicación. La resta es la inversa de la suma. Los niños aprenden operaciones inversas en todos los grados.

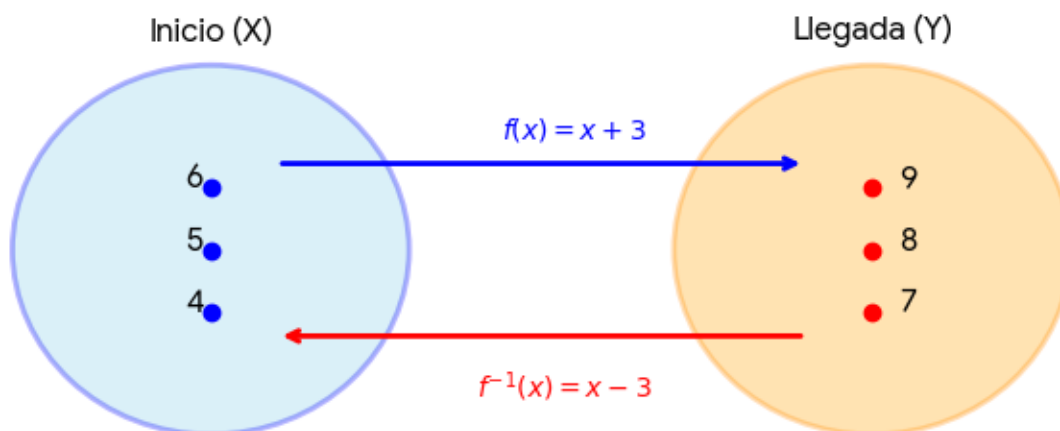
Manera de explicárselo a un niño: 'Si te puse un sombrero, para deshacerlo te lo quito. La función inversa te quita el sombrero.'

Ejemplo:

Figura 12

Explora con la hormiga: la función inversa

□ La hormiga regresa sobre sus pasos



Para entender la **función inversa** (f^{-1}), imagina que nuestra hormiga hizo un camino y ahora tiene que **deshacerlo** para volver exactamente al punto de partida.

Si la función original f lleva a la hormiga del punto **A** al **B**, la inversa f^{-1} la devuelve del **B** al **A**.

Ejemplo: El túnel de la hormiga

1. **Función** $f(x) = x + 3$: La hormiga camina 3 metros hacia adelante en el túnel.
2. **Función Inversa** $f^{-1}(x) = x - 3$: Para regresar, la hormiga debe restar esos 3 metros (caminar hacia atrás).

Puntos clave:

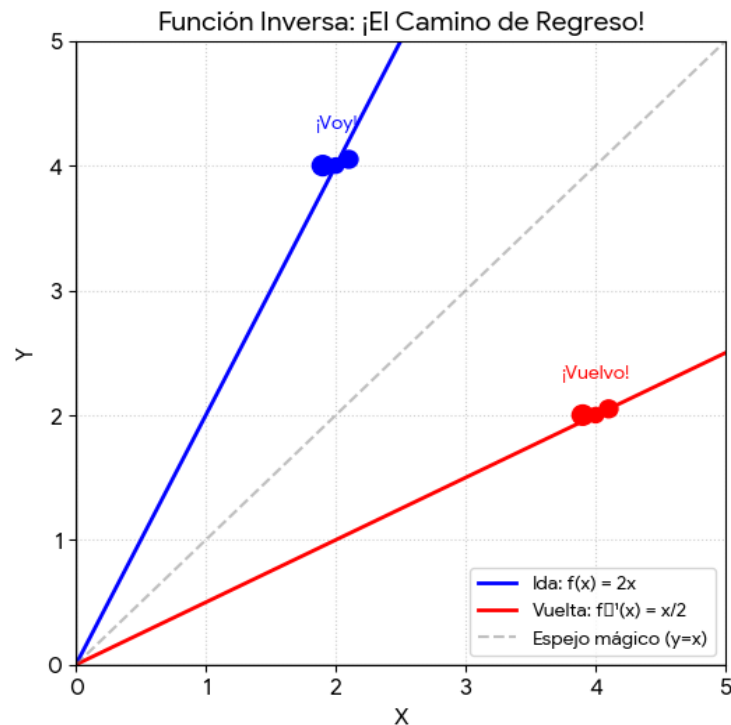
- El **dominio** de f se convierte en el **rango** de f^{-1} .
- En el diagrama sagital, las flechas simplemente **cambian de sentido**.
- Si la hormiga entró al túnel en el número **4** y salió en el **7**, la inversa toma el **7** y la escupe de vuelta en el **4**.

Gráfico de la Función Inversa

Aquí verás a la hormiga en su camino de ida (línea azul) y cómo sería su reflejo para volver a casa (línea roja):

Figura 13

Explora con la hormiga: representación de una función cuadrática



La **función inversa** es como el botón de "deshacer" o una película que se proyecta hacia atrás.

La Hormiga y el Camino de Regreso

Imagina que nuestra hormiga camina desde su hormiguero hasta una flor siguiendo una regla. La **función inversa** es la regla que le dice cómo volver exactamente por donde vino para llegar a casa.

- **La Función (f):** Es el viaje de **ida**. Por ejemplo: "Avanza 3 pasos".
- **La Función Inversa (f^{-1}):** Es el viaje de **vuelta**. Para deshacer lo anterior, la regla sería: "Retrocede 3 pasos".
- **El Espejo:** En los gráficos, la función y su inversa son como reflejos en un espejo mágico (una línea diagonal). Si la ida sube, la vuelta baja.

Proporcionalidad directa

$y = kx$, k constante de proporcionalidad. Al duplicar x , se duplica y . Cuando al multiplicar la entrada por un número, la salida se multiplica por el mismo número. La fórmula es $y = kx$, donde k es la constante.

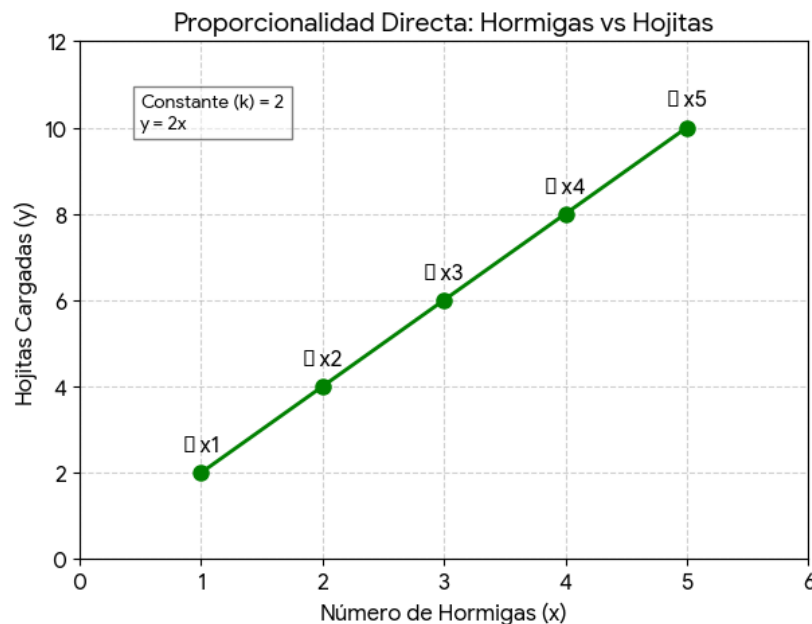
Ejemplo: Si 1 kg de arroz cuesta S/ 4, entonces 2 kg cuestan S/ 8, 3 kg cuestan S/ 12... Siempre multiplicas por 4. $k=4$.

Señal visual: en la gráfica es una LINEA RECTA que pasa por el origen (0,0).

En primaria: tablas de multiplicar, precios, recetas, conversión de medidas. Es el contenido más importante de 4.º y 5.º

Figura 14

Explora con la hormiga: la proporcionalidad directa



La **proporcionalidad directa** ocurre cuando dos cantidades aumentan o disminuyen en la misma proporción. Si una se duplica, la otra también.

Imagina a nuestra hormiga cargando hojitas:

- Si 1 hormiga puede cargar 2 hojitas.
- Si hay 2 hormigas, cargarán 4 hojitas.
- Si hay 3 hormigas, cargarán 6 hojitas.

La relación siempre es la misma (2 hojitas por cada hormiga). La fórmula sería: $y=kx$ (donde, k es la constante de proporcionalidad, en este caso, 2)

Características clave:

1. **Línea recta:** La gráfica siempre es una línea recta que pasa por el punto (0,0) (si hay 0 hormigas, hay 0 hojitas).
2. **Crecimiento constante:** Si el número de hormigas sube, el número de hojitas sube al mismo ritmo.
3. **La Constante (k):** Es el número por el que multiplicas la x para obtener la y . En este ejemplo, $k = 2$.

Proporcionalidad inversa

$y = k/x$. Al duplicar x , y se divide entre 2. En primaria: velocidad-tiempo, número de trabajadores-días.

Cuando al multiplicar la entrada por un número, la salida se DIVIDE por el mismo número. La fórmula es $y = k/x$.

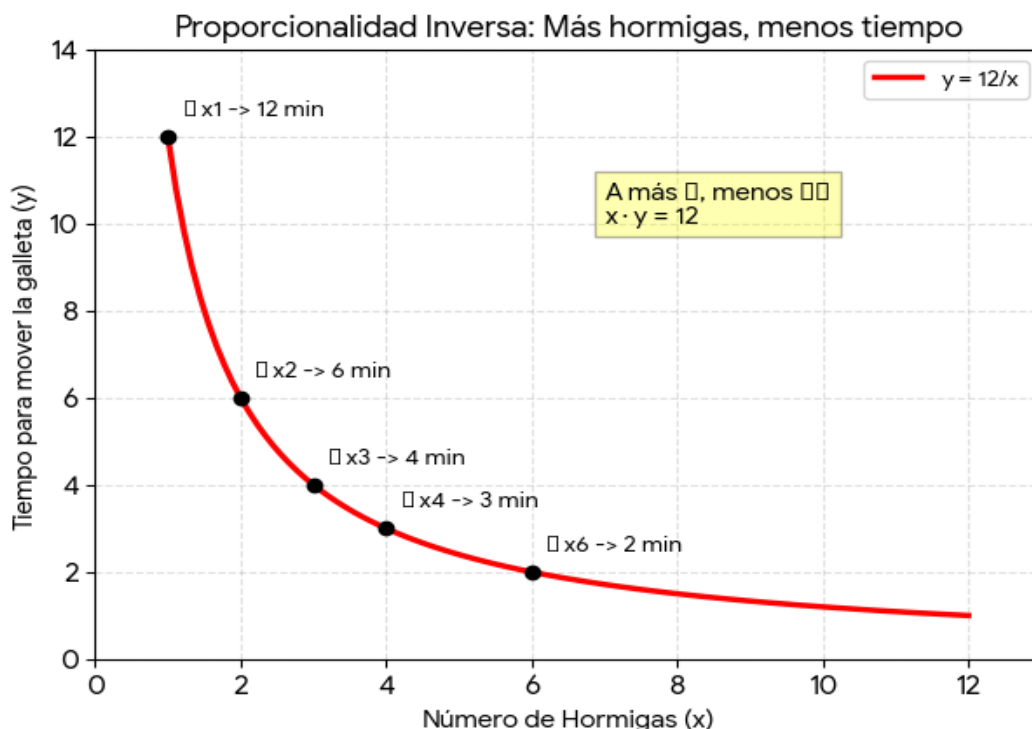
Ejemplo: 2 trabajadores terminan un muro en 6 días. Si son 3 trabajadores, tardan 4 días. Si son 6, tardan 2 días. Mas trabajadores = menos tiempo.

Señal visual: en la gráfica es una CURVA (hipérbola) que nunca toca los ejes.

En primaria: velocidad-tiempo, número de personas-días de trabajo. Aparece en 5.º y 6.º

Figura 15

Explora con la hormiga: la proporcionalidad inversa



La proporcionalidad inversa ocurre cuando una cantidad aumenta y la otra disminuye en la misma proporción. Si una se duplica, la otra se reduce a la mitad.

Imagina a nuestras hormigas moviendo una galleta gigante:

- Si 1 hormiga hace el trabajo sola, tarda 12 minutos.
- Si vienen 2 hormigas, tardan la mitad: 6 minutos.
- Si vienen 3 hormigas, tardan solo 4 minutos.

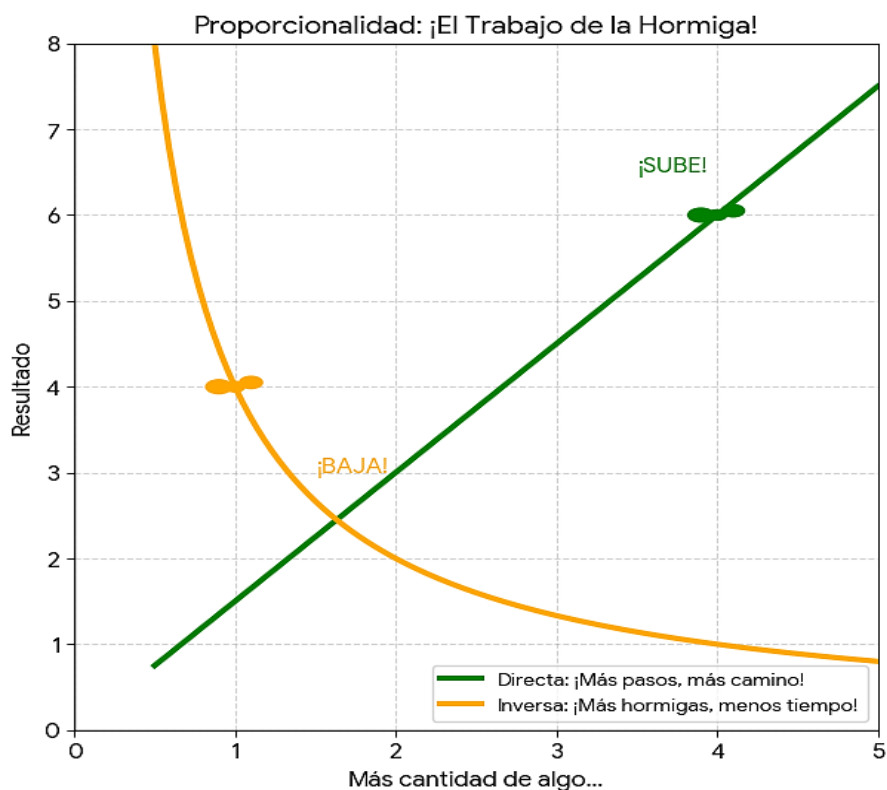
La fórmula es $y = \frac{k}{x}$, donde k es el trabajo total (en este caso, 12).

Diferencias con la directa:

1. **La forma:** No es una línea recta, es una **curva** llamada hipérbola.
2. **El producto es constante:** Si multiplicas el número de hormigas por el tiempo, siempre te da el mismo resultado ($1 \times 12 = 12$, $2 \times 6 = 12$, $3 \times 4 = 12$).
3. **Sentido opuesto:** Mientras más hormigas ayuden (x crece), más rápido terminan el trabajo (y baja).

Figura 16

Explora con la hormiga: diferencias entre la proporcionalidad directa e inversa



- En la línea verde, la hormiga sube feliz porque todo aumenta igual.
- En la línea naranja, la curva baja porque al aumentar una cosa, la otra se hace pequeña.

SECUENCIA DIDÁCTICA CON ETAPAS EIS

Tabla 2:

Secuencia Didáctica con etapas EIS

ETAPA	ENACTIVA Cuerpo en movimiento	ENACTIVA Mesa de trabajo	ICONICA Dibujos e imágenes	SIMBOLICA Letras y números
Que hacen los estudiantes	ACTIVIDAD CORPORAL: 'La Máquina Humana' Un alumno es la ENTRADA (dice un número), otro es la REGLA (ej: dobla el número) (+3, x2), un tercero es la SALIDA (dice el resultado). Se mueven por el aula formando pares. La clase adivina la regla. Luego en el patio forman pares físicos (par ordenado vivo) tomándose de la mano y cambiando de lugar.	CON OBJETOS EN LA MESA: Usando tapas de botellas y fichas de cartón, construyen el diagrama de flechas. La cuerda/lana une cada entrada con su salida. Llenan la tabla T con semillas: frijoles=entrada, piedritas=salida. Verifican la regla con cada par concreto.	CON DIBUJOS: Dibujan el diagrama de flechas en su cuaderno. Grafican los puntos en papel cuadriculado. Conectan los puntos y observan si forman una línea recta. Colorean la línea y etiquetan los ejes. Visualizan la 'forma' de la función: ¿es línea recta? ¿sube o baja?	CON SIMBOLOS: Escriben la notación: $f: A \rightarrow B$ $f(x) = 3x$ $f(1)=3$, $f(2)=6...$ Identifican dominio y rango con llaves. Conectan con CNEB 5-6 grado. Escriben la notación $f: A \rightarrow B$, $f(x) = 2x + 1$. Identifican dominio y rango con llaves $\{ \}$. Usan la 'máquina de funciones': $f(3) = 2(3)+1 = 7$.

GRADO	¿QUÉ APRENDE EN PRIMARIA?	ACTIVIDAD EIS SUGERIDA	MATERIALES
1.º y 2.º	Suma y resta como operaciones inversas. 'Si sumo 3, para regresar resto 3.' todavía no se llama función inversa pero se vive el concepto.	ENACTIVA: dar 3 pasos adelante y 3 atrás. ICONICA: flecha de ida y vuelta. SIMBOLICA: $5+3=8$ y $8-3=5$.	Cinta en el suelo, tapas de botellas.
3.º y 4.º	multiplicación y división como inversas. Comprender que dividir deshace la multiplicación. Primera proporcionalidad directa.	ENACTIVA: repartir objetos en grupos iguales. ICONICA: tabla de doble entrada. SIMBOLICA: $4 \times 3=12$ y $12/3=4$.	Semillas, cajas pequeñas de reciclaje, papel cuadriculado.

5.º	Proporcionalidad directa con constante k. Tablas de conversión (cm a m, soles a céntimos). Reconocer si una tabla es proporcional directa.	ENACTIVA: mercadito (precio por cantidad). ICONICA: grafica de puntos en plano. SIMBOLICA: $y = kx$, hallar k.	Papel cuadriculado A4, fichas de precios recicladas, regla.
6.º	Proporcionalidad inversa. Distinguir directa de inversa en situaciones reales. Resolver problemas de reparto proporcional.	ENACTIVA: simular 'cuantos días tarda X personas en pintar una pared'. ICONICA: las dos graficas comparadas. SIMBOLICA: $y=k/x$, verificar con datos.	Papel cuadriculado A3, plumones de colores.

MATERIALES EDUCATIVOS — DÍA 1 — MÓDULOS 1 y 2	
Materiales de reciclaje	Materiales a conseguir / comprar
Cajas de cartón pequeñas (cajas de remedios, jabón, etc.) — al menos 2 por grupo Tapas de botellas de plástico de distintos colores (30 por grupo) Frijoles, lentejas, piedritas o semillas secas (para representar valores numéricos) Trozos de lana o cordel de colores (para las flechas del diagrama sagital) Botellas plásticas cortadas (para separadores/recipientes) Periódicos y revistas viejas (para recortar números y símbolos) Bolsas plásticas pequeñas (para clasificar fichas y tapas por colores) Cartón de cajas de cereales o zapatos (para fabricar fichas numéricas) Envases de yogurt limpios (como 'máquinas' pequeñas para poner fichas)	Papel cuadriculado A4 (1 hoja por módulo por estudiante) Plumones de colores delgados (set mínimo 4 colores por grupo) Reglas de 30 cm (1 por estudiante) Masking tape o cinta adhesiva (1 rollo por grupo) Fichas de cartulina de colores cortadas 5x5 cm (el facilitador las prepara o las trae recortadas) Marcadores gruesos para el suelo/pizarra (al menos 2 colores por salón) Plumón de pizarra (para uso del facilitador) Papel A3 (1 hoja por grupo para el diagrama grande)

CAPÍTULO III

Límite y continuidad: el pensamiento sobre el cambio

Unidad II del sílabo DPM · Día 2 · Módulos 3 y 4

DÍA 2

Límite, Continuidad y el Pensamiento sobre el Cambio

Unidad II del sílabo DPM | Competencias CNEB: Regularidad y cambio · Gestión de datos · Forma y movimiento

MÓDULO 3: Límite — La Base del Razonamiento sobre Variación y Cambio

¿Por qué necesito aprender esto?

Cuando un niño de 6.º observa una tabla de datos y dice '¿hacia dónde va creciendo esta cantidad?', está usando el pensamiento de límite. Cuando ve en una gráfica que una línea 'se acerca pero parece que nunca llega' a un valor, está visualizando una asíntota. El concepto de límite es la base del razonamiento matemático avanzado, pero en primaria se trabaja de forma intuitiva a través de tendencias y secuencias. Este es, precisamente, uno de los vacíos que la literatura reciente identifica en la formación de docentes: Toh, Toh, Teo y Zhu (2022) documentan que los futuros profesores suelen tener un conocimiento fragmentado del 'cálculo escolar' —incluida la noción intuitiva de límite— por haberlo aprendido de forma puramente procedimental en su propia formación universitaria. De modo similar, Slavíčková y Vargová (2023) encuentran diferencias significativas en la comprensión del concepto de límite entre futuros docentes y matemáticos profesionales, lo que confirma la necesidad de trabajar el límite desde la experiencia intuitiva —tendencias, secuencias, aproximaciones— antes que desde la definición formal ϵ - δ , tal como propone la progresión EIS de este módulo.

DEFINICIONES CONCEPTUALES FUNDAMENTALES

Límite de una función

$\lim(x \rightarrow a) f(x) = L$, significa que $f(x)$ se acerca tanto como queramos a L cuando x se acerca a a , sin necesariamente llegar. 'Lo que va a pasar' antes de que pase. En primaria: predecir el valor siguiente en una secuencia.

El valor al que se ACERCA $f(x)$ cuando x se acerca a un número determinado. No es necesariamente lo que pasa en ese punto exacto, sino lo que pasa CERCA de ese punto.

analogía perfecta: Estas caminando hacia una puerta. El límite es la puerta en sí. Lo que importa es a DONDE te diriges, no si llegas o no.

Ejemplo numérico simple: $f(x) = 2x$. Cuando x se acerca a 3, $f(x)$ se acerca a 6. El límite es 6. Lo escribimos: $\lim(x \rightarrow 3) 2x = 6$.

En primaria: 'si seguimos la secuencia $1/2, 3/4, 7/8, 15/16 \dots$ el número al que se acerca cada vez más esta secuencia, sin llegar nunca a tocarlo, es 1.' Eso es pensar en límites de forma intuitiva (distinto de una secuencia como $2, 4, 6, 8 \dots$, que no se acerca a ningún número: simplemente crece sin límite).

Figura 17

Explora con la hormiga: el límite de una función

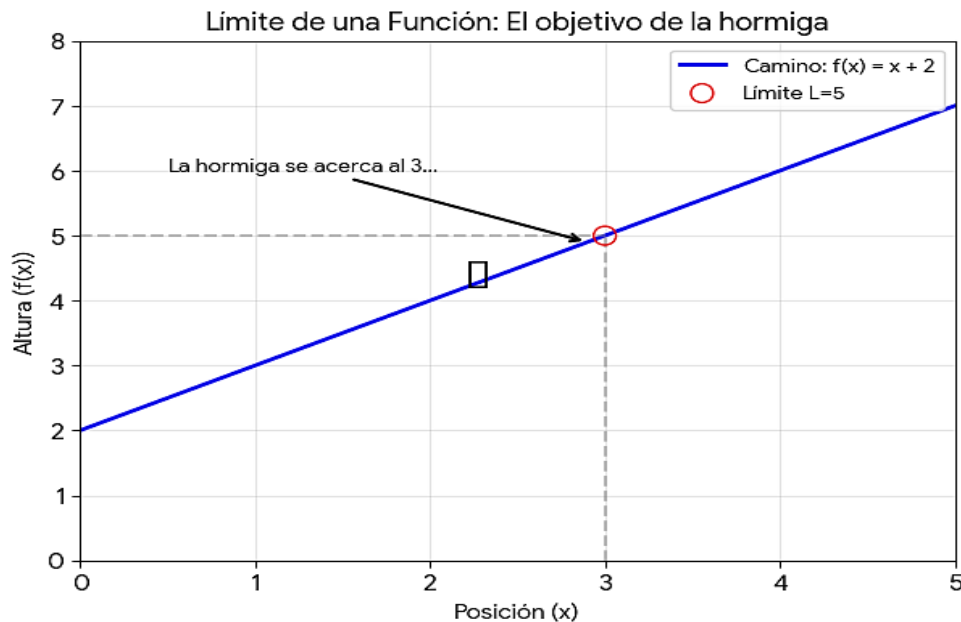


- **Tú eres el punto azul:** Te mueves hacia la derecha.
- **La pared roja es el Límite:** Es como una meta que siempre ves de frente, pero por más que te acerques, siempre hay un espacio pequeñito entre tú y ella.
¡En matemáticas, el **límite** es ese número (la pared) al que casi le das un beso, pero nunca llegas a tocarlo!

Ejemplo:

Figura 18

Explora con la hormiga: representación del límite de una función



El **límite** de una función es el valor al que se **acerca** la función a medida que la x se aproxima a un punto determinado, ¡aunque nunca llegue a tocarlo!

Imagina a nuestra hormiga caminando hacia una **migaja de pan** que está al final de una mesa:

1. La hormiga se acerca cada vez más: está a 10 cm, luego a 5 cm, luego a 1 mm...
2. El **límite** es la posición exacta de la migaja.
3. No importa si la hormiga llega a tocar la migaja o si hay un hueco justo ahí; el límite es el lugar hacia donde la hormiga **se dirige**.

Ejemplo: $f(x) = x + 2$ cuando $x \rightarrow 3$

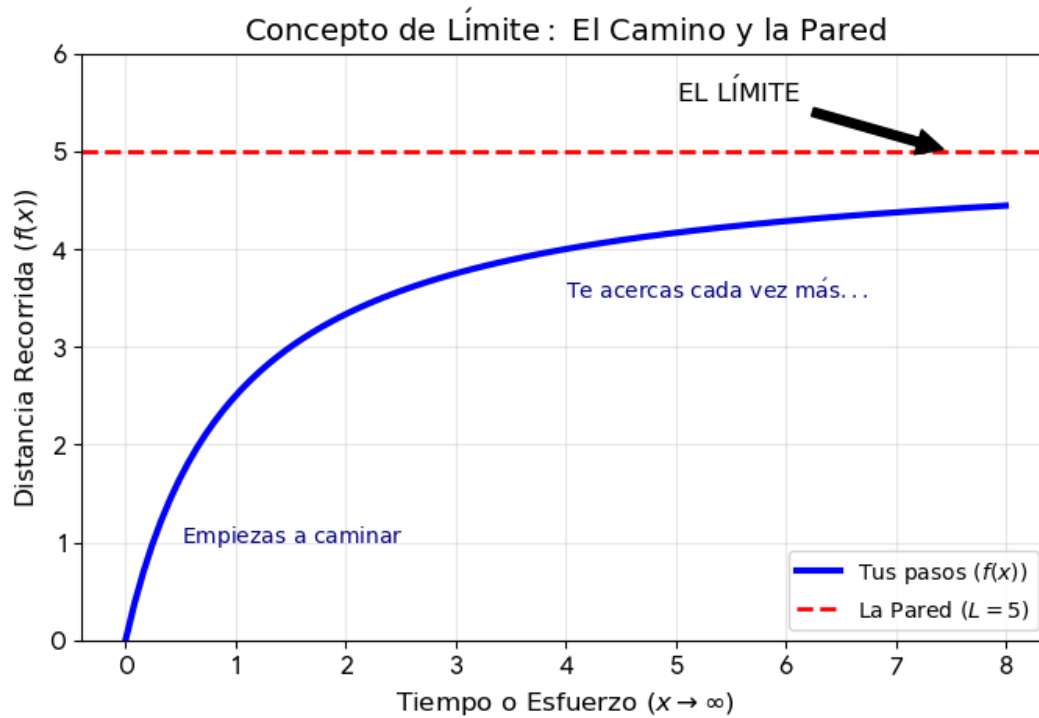
A medida que la hormiga (x) se acerca al número 3, la altura de su camino ($f(x)$) se acerca a 5.

Se escribe: $\lim_{x \rightarrow 3} (x + 2) = 5$.

El límite no es donde la hormiga *está*, sino hacia donde la hormiga *va*. Es una tendencia. Si por los dos lados (izquierda y derecha) la hormiga parece dirigirse al mismo punto, ¡ese es el límite!

Figura 19

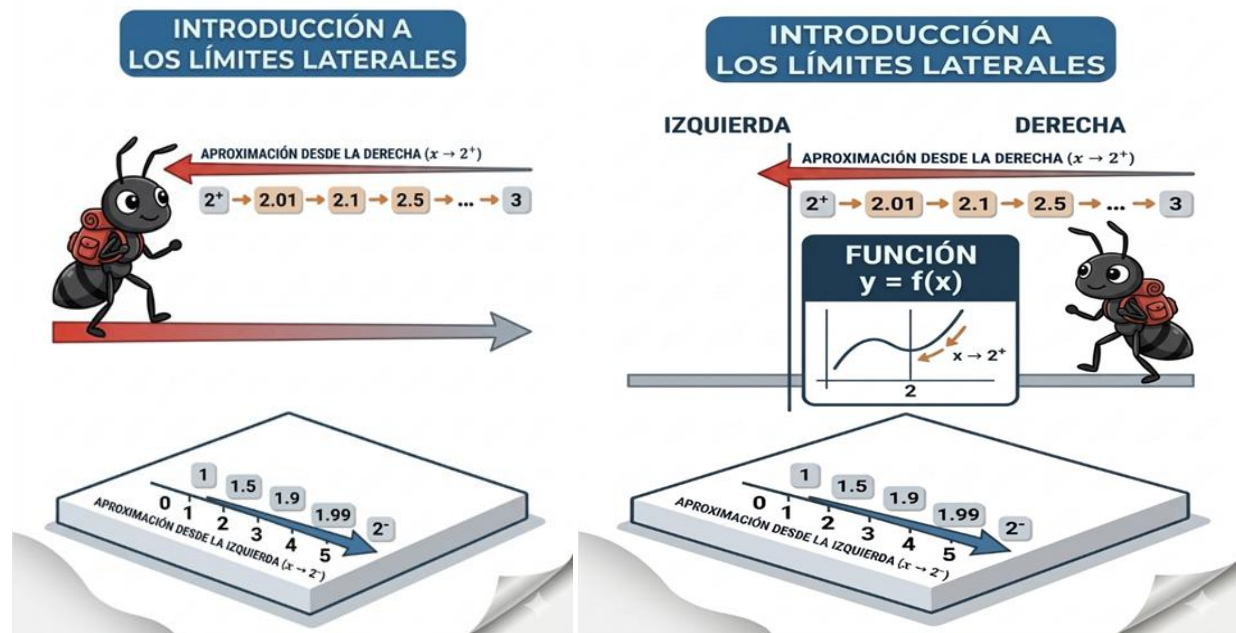
Explora con la hormiga: representación del límite de una función



"El límite de la función, cuando x tiende al infinito, es cinco".

Figura 20

Explora con la hormiga: representación de límites laterales

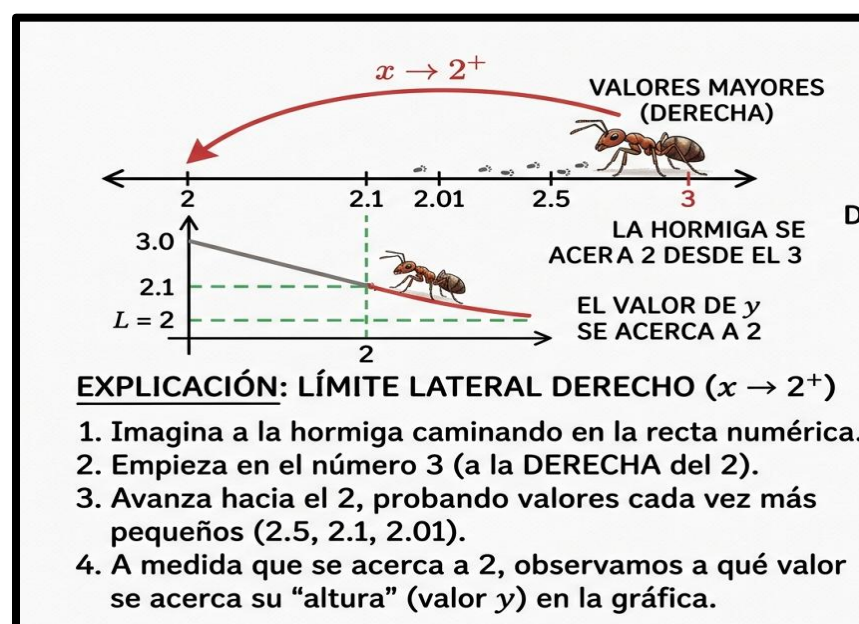


Límite lateral derecho

$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$: el valor al que tiende $f(x)$ cuando x se acerca a ' a ' por valores mayores que ' a '. En primaria: 'si seguimos aumentando 1, 1, 1... ¿a dónde llegamos?'

Figura 21

Explora con la hormiga: representación del límite lateral derecho

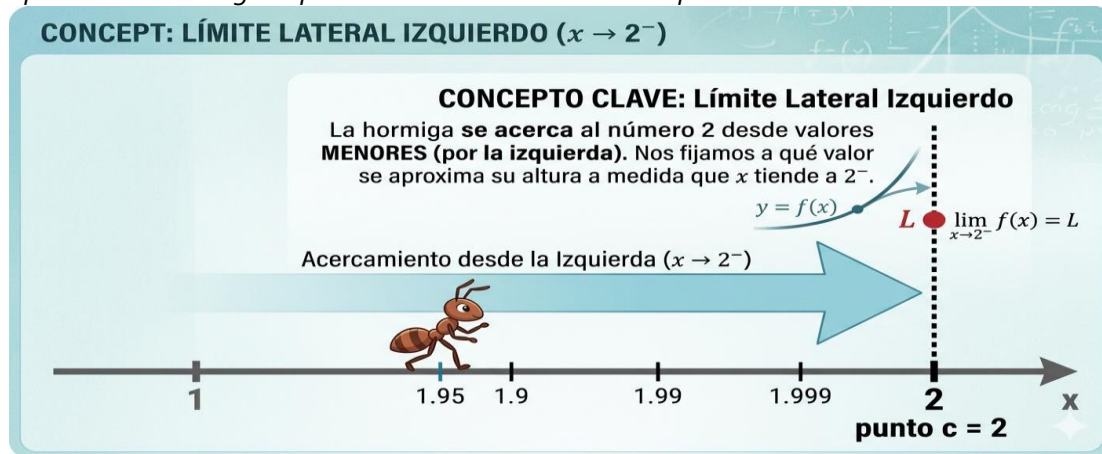


Límite lateral izquierdo

$\lim_{(x \rightarrow a^-)} f(x)$: el valor al que tiende $f(x)$ cuando x se acerca a ' a ' por valores menores que ' a '. Ambos laterales deben ser iguales para que exista el límite.

Figura 22

Explora con la hormiga: representación del límite lateral izquierdo



En matemáticas, cuando los dos caminos llegan al **mismo lugar**, decimos que el **Límite existe**.

Ejemplo:

¿Cómo leer este mapa?

1. **Desde la Izquierda ($\lim_{x \rightarrow 4^-}$)**: El autobús naranja viene subiendo por la calle. Si miras hacia dónde apunta, parece que va a llegar justo al piso 3.
2. **Desde la Derecha ($\lim_{x \rightarrow 4^+}$)**: Tú vienes bajando desde el norte (línea verde). Si miras tu camino, también vas derecho al piso 3.
3. **El Límite General**: Como los dos apuntan al mismo número (3), decimos que:

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 3$$

Límite al infinito

$\lim_{(x \rightarrow \infty)} f(x) = L$: la función se acerca a L cuando x crece indefinidamente. En primaria: una gráfica que 'casi llega' pero nunca toca una línea (asíntota); tendencia en datos estadísticos.

Figura 23

Explora con la hormiga: representación de los límites laterales

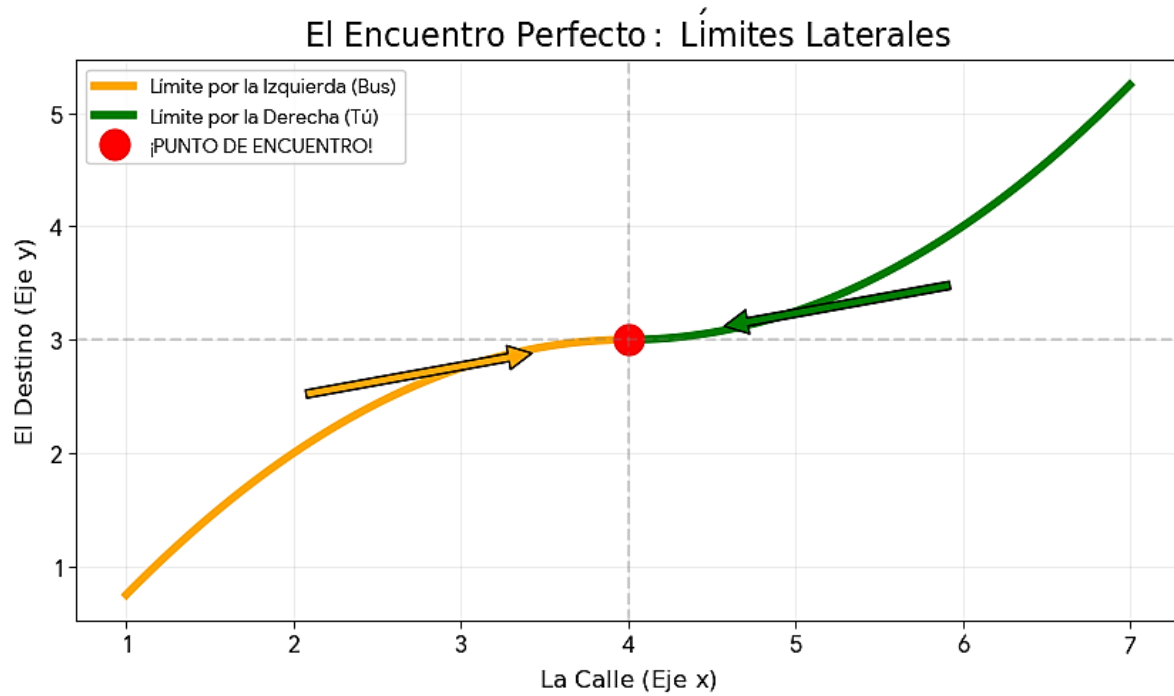
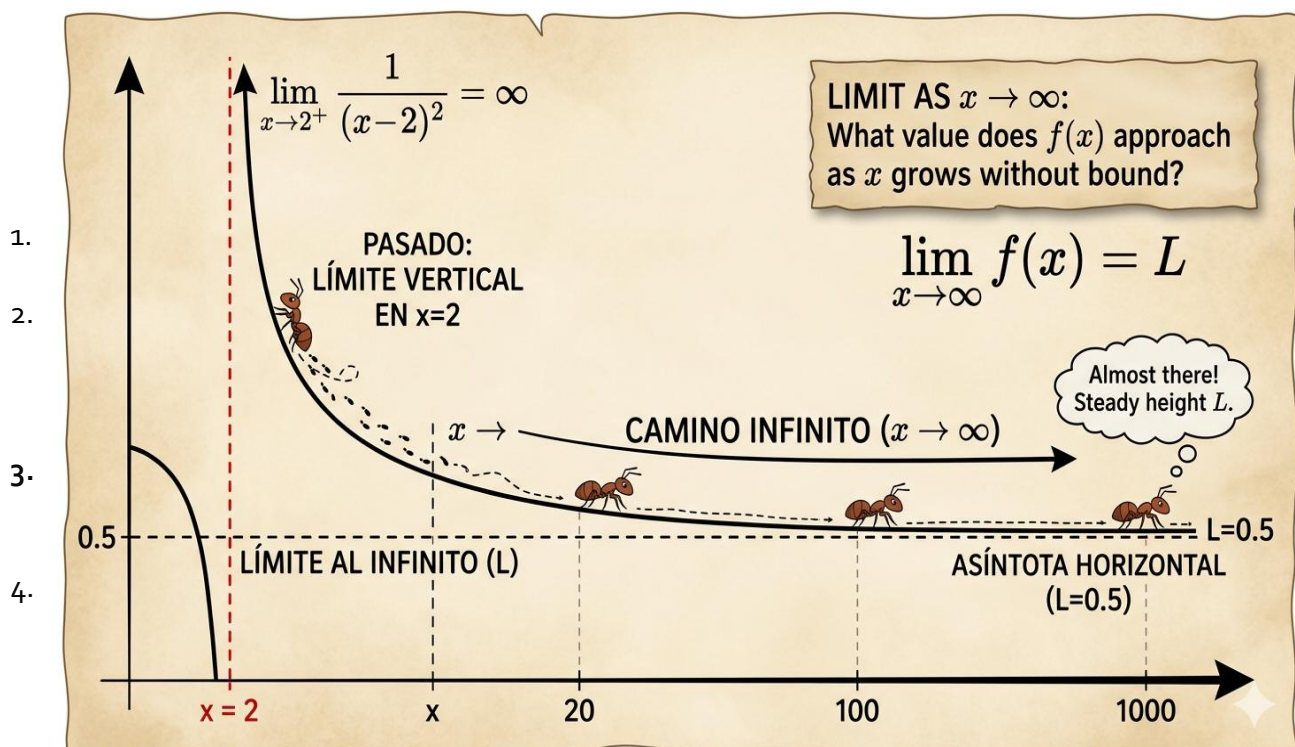


Figura 24

Explora con la hormiga: representación del límite al infinito



El límite al infinito es el valor al que se estabiliza la "altura" de la función cuando la variable x se hace **extremadamente grande**.

Representación Simbólica

En matemáticas, este viaje eterno se escribe así:

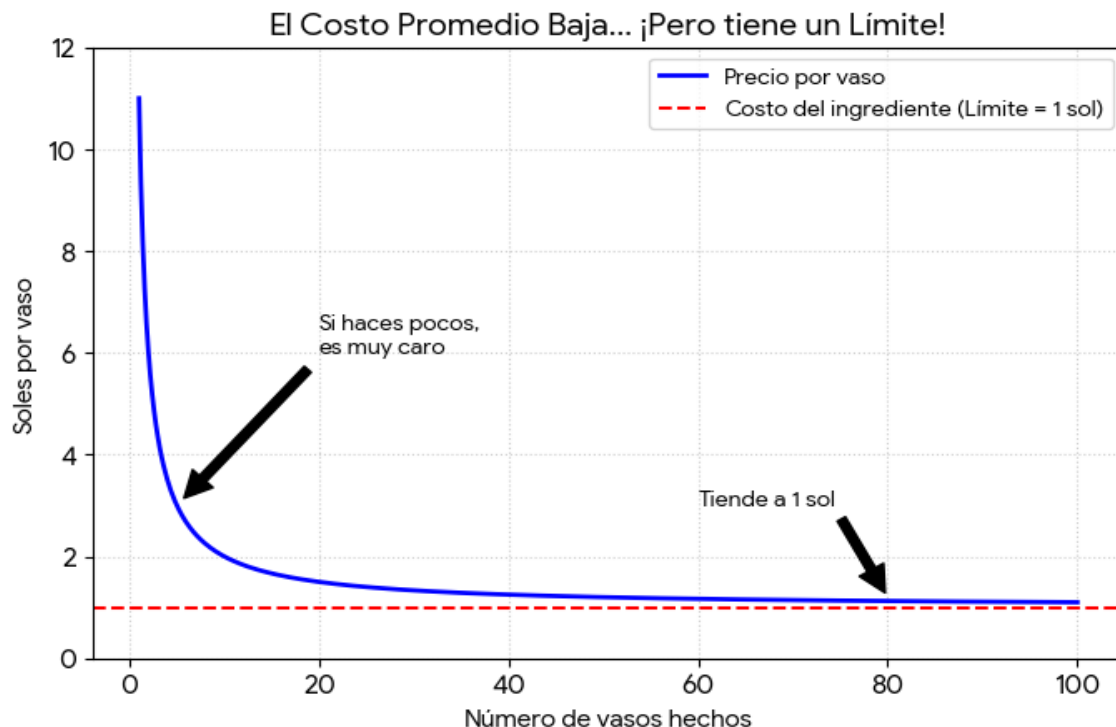
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

- $x \rightarrow \infty$: Significa que la hormiga camina hacia la derecha sin fin.
- L : Es la altura (asíntota horizontal) a la que la hormiga se acerca cada vez más, casi como si estuviera a punto de tocar un techo, pero sin alcanzarlo nunca.

Ejemplo:

Figura 25

Explora con la hormiga: representación del límite al infinito



- **La curva azul:** Representa cuánto te cuesta cada vaso. Al principio está muy alta porque tienes que pagar el puesto (los 10 soles) con pocos vasos.
- **La bajada:** A medida que avanzas a la derecha (haces más vasos), el precio cae rápidamente. Esto es porque el costo del puesto se divide entre más y más niños.

- **La línea roja (El límite):** Es el costo de los ingredientes (1 sol). Por más que la curva azul baje y baje, **nunca tocará ni pasará** la línea roja. Ese es el límite al infinito: el costo mínimo absoluto para poder seguir produciendo.

Imagina que quieres vender limonada en la puerta de tu casa. Para empezar, tienes dos tipos de gastos:

1. **El gasto "fijo" (El puesto):** Compras una mesa y haces un cartel llamativo. Digamos que te gastas **10 soles**. No importa si vendes 1 vaso o 100, ya te gastaste esos 10 soles.
2. **El gasto "por vaso" (Los ingredientes):** Cada vez que haces un vaso de limonada, usas un limón y azúcar, que te cuestan **1 sol**.

¿Qué pasa con el precio si haces mucha limonada?

- **Si solo haces 1 vaso:** Ese vaso te costó los 10 soles del puesto + 1 sol del limón = **11 soles**. ¡Uy, carísimo!
- **Si haces 10 vasos:** Los 10 soles del puesto se reparten entre los 10 vasos (1 sol por cada uno) + el sol de sus limones = **2 soles** cada vaso. ¡Ya bajó!
- **Si haces 1.000.000 de vasos:** Los 10 soles del puesto repartidos entre un millón de niños es casi nada, ¡es como un granito de arena! El costo del puesto "desaparece".

¿Cuál es el número mínimo?

Por más que hagas billones de vasos, el precio **nunca será menor a 1 sol**.

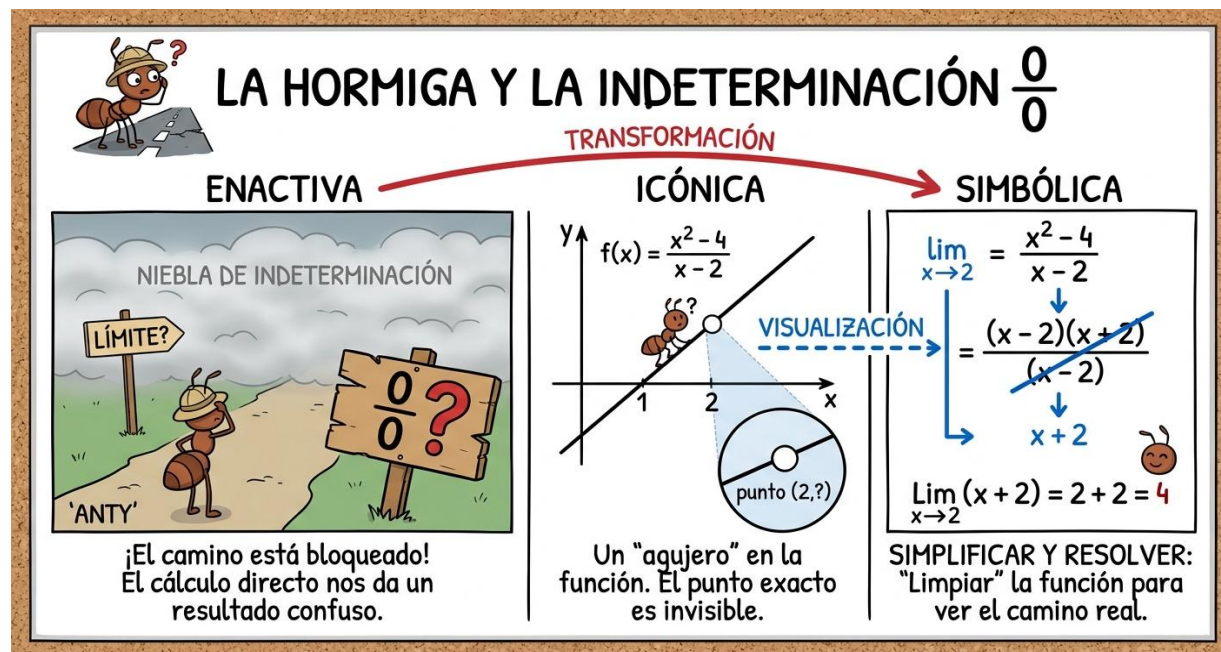
¿Por qué? Porque siempre vas a necesitar comprar el limón y el azúcar para cada vaso nuevo. Ese "sol" del ingrediente es el **límite**.

En resumen: El precio baja porque el costo del "puesto" se reparte entre muchos, pero el límite final es lo que te cuesta **la materia prima** de cada producto.

Asíntota horizontal	Recta $y = L$ que la gráfica de f se aproxima pero no corta (o no cruza para siempre) cuando $x \rightarrow \pm\infty$. En primaria: el techo de crecimiento en una tendencia estadística.
Indeterminación	Expresiones como $0/0$, ∞/∞ que no tienen valor definido directamente. Se resuelven con factorización, racionalización o regla de L'Hôpital. En primaria: situaciones donde la respuesta 'no parece clara' hasta analizar el patrón.

Figura 26

Explora con la hormiga: la indeterminación



¿Qué es una Indeterminación? 🐜 ?

Imagina que la hormiga avanza por su recta numérica y, de repente, el camino se llena de una **niebla espesa** o aparece un muro con un signo de interrogación.

- 1. El Conflicto:** La hormiga sabe que hay un camino adelante, pero al mirar el mapa (la función), este le da una respuesta que no puede interpretar directamente, como $0/0$ o ∞/∞ .
- 2. No es el fin:** Una indeterminación **no significa que no haya un resultado**; significa que la "cara" actual de la función nos oculta la verdad. Es un mensaje de la matemática que dice: "Aquí hay un valor, pero tienes que trabajar un poco más para verlo".
- 2. La Solución:** Para que la hormiga pueda cruzar la niebla, debe usar una herramienta (como factorizar o simplificar). Al hacerlo, la niebla se disipa y el camino real aparece, permitiéndole ver el límite con claridad.

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} \xrightarrow{\text{limpiar camino}} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)} = x + 2$$

Esta ilustración ayuda al estudiante a entender que la indeterminación es solo un **estado temporal de duda** que se resuelve con álgebra.

Otro ejemplo:

Imagina que estás viendo una película en YouTube y, justo en la escena más importante, ¡se corta el internet!

1. El "Círculo de Carga" (La Niebla: o/o)

La pantalla se queda dando vueltas. No puedes ver qué pasó en el **segundo 30** exacto de la película. Si le preguntas a tu hermanito qué pasó ahí, te dirá: "No sé, está trabado". Eso es el **o/o**, un hueco donde no hay información.

2. Mirar lo que pasó antes y después (El Límite)

Como eres un detective, haces lo siguiente:

- Miras el **segundo 28**: El superhéroe está saltando.
- Miras el **segundo 29**: El superhéroe está en el aire, casi llegando al techo.
- *(El segundo 30 está trabado)*
- Miras el **segundo 31**: El superhéroe ya está parado en el techo.

3. ¡Despejaste la niebla!

Aunque el video se trabó justo en el segundo 30, tú puedes decir con total seguridad: "**¡El límite es el techo!**".

No necesitaste ver el segundo exacto para saber hacia dónde iba el héroe. El camino (los segundos anteriores y posteriores) te "chismearon" el resultado.

El **límite** es como adivinar qué dice una palabra cuando alguien puso una mancha de chocolate encima de una letra. Si lees lo que hay antes y después, ¡ya sabes qué palabra es!

SECUENCIA DIDÁCTICA CON ETAPAS EIS

CONEXIÓN CON PRIMARIA (CNEB)

Tabla 3:

Secuencia didáctica con enfoque en las etapas EIS para el aprendizaje de Límite, Continuidad y el Pensamiento sobre el Cambio

ETAPA	ENACTIVA Cuerpo en movimiento	ENACTIVA Mesa de trabajo	ICÓNICA Dibujos e imágenes	SIMBÓLICA Letras y números
Que hacen los estudiantes	ACTIVIDAD CORPORAL: 'Nos acercamos, pero no llegamos' Se traza una línea en el suelo (la 'pared'). Los alumnos caminan hacia ella pero cada paso es la mitad del anterior: 1 metro, 0.5, 0.25... Discuten: matemáticamente, ¿cuando llegan? Luego: dos grupos avanzan hacia un punto desde lados opuestos (límites laterales). Si llegan al mismo punto: el límite existe. Si uno para antes: el límite no existe.	CON OBJETOS EN LA MESA: Tiras de papel de periódico: doblar por la mitad, luego doblar ese resultado, luego otro... Medir cada trozo y registrar en tabla (1, 0.5, 0.25, 0.125...). Con tapas de botellas en fila, aproximarse a una 'barrera' de cartón que representa la asíntota. Nunca llegan a cruzarla.	CON DIBUJOS: Grafican la secuencia 1, 0.5, 0.25... en papel cuadriculado. Dibujan la curva $f(x)=1/x$ y trazan la asíntota con línea punteada. Analizan gráficos reales del INEI La Libertad: identifican visualmente hacia donde tiende la curva.	CON SÍMBOLOS: Escriben: $\lim(x \rightarrow 3) 2x = 6$. Calculan límites simples sustituyendo el valor. Aprenden la notación '$x \rightarrow \infty$'. Conectan con CNEB 6.º: 'argumenta por que una cantidad varía o permanece constante'.

GRADO	¿Qué aprende el niño?	ENACTIVA (movimiento corporal)	ICÓNICA (imagen/dibujo)	SIMBÓLICA (símbolo/número)
1.º y 2.º	Continuación de patrones. ¿Qué viene después? La idea de 'hacia dónde va' sin formalismo.	Tren de niños: cada uno da un paso más que el anterior. ¿Hacia dónde va el tren? ¿Siempre avanza o se detiene?	Secuencia de cuadrados que crece: 1, 4, 9, 16... Dibujan el siguiente. '¿Hacia dónde va esta secuencia?'	Escriben los primeros términos. Predicen el término 10 sin dibujarlo. Razonamiento de límite informal.
3.º y 4.º	Tendencias en gráficas de barras. ¿Sube, baja o se estabiliza la tendencia?	Los niños se paran en fila y van subiendo/bajando los brazos según los valores de la gráfica. ¿Dónde se estabiliza el brazo?	Gráfica de barras de temperatura semanal. Trazan una línea de tendencia. '¿A qué temperatura se acerca en invierno?'	Escriben la tendencia: 'aumenta 2°C por semana'. Predicen la temperatura en la semana 10.
5.º	Tendencias en gráficas lineales. Extrapolación razonada de datos.	Mercadito con precios que cambian: ¿hacia qué precio mínimo tiende este producto si lo producimos en grandes cantidades?	Gráficas de líneas con tendencia visible. Extienden la línea con regla. '¿Dónde corta el eje o dónde se aplanan?'	Calculan la razón de cambio. Predicen: si sigue esta tendencia, ¿qué valor tendrá en el período 20?
6.º	Límites informales en contexto de proporcionalidad y situaciones reales.	Dilución de jugo: agregan agua cada vez. El sabor disminuye... ¿se vuelve exactamente cero? ¿O hay un mínimo? Discuten el concepto de 'tender a cero'.	Gráficas que se acercan a una línea horizontal. Con GeoGebra: zoom out para ver el comportamiento a largo plazo.	Escriben: 'cuando $x \rightarrow \infty$, $f(x) \rightarrow 0$ '. Identifican la asíntota horizontal y su ecuación.

MÓDULO 4: Continuidad — Razonamiento Continuo y Gestión de Datos en Primaria

¿Por qué necesito aprender esto?

Cuando un niño traza una trayectoria en el mapa sin levantar el lápiz, está usando la idea de continuidad. Cuando observa que el precio de un producto sube gradualmente (continuo) o que de un día a otro bajó bruscamente (discontinuo), está distinguiendo funciones continuas de discontinuas. Este concepto te ayudará a enseñar gráficos estadísticos, trayectorias y cambio de forma mucho más profunda.

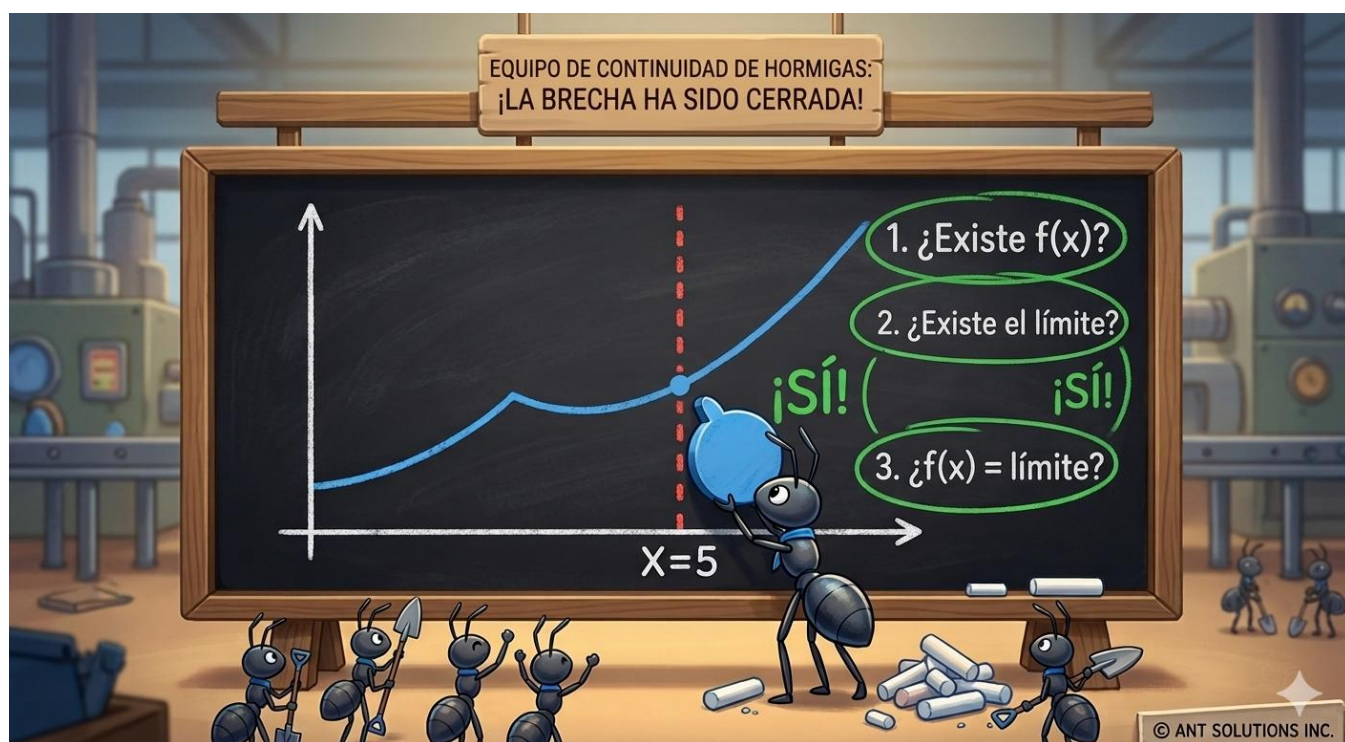
DEFINICIONES CONCEPTUALES FUNDAMENTALES

Continuidad en un punto

f es continua en $x=a$ si: (1) $f(a)$ está definida, (2) existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, (3) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. 'No hay saltos, no hay huecos, no hay asíntotas verticales en ese punto.' En primaria: una trayectoria sin levanta el lápiz.

Figura 27

Explora con la hormiga: la continuidad en un punto



¿Qué significa que sea Continua?

Imagina que este sendero es el camino principal de la colonia. Para que la hormiguita pueda llevar su caja sin que se rompa, el camino tiene que ser **continuo**.

1. **Sin Saltos:** La hormiguita puede caminar de principio a fin sin tener que dar brincos locos. Es como un tobogán que nunca se corta.
2. **Sin Huecos:** No falta ningún trocito de suelo. Si pones el dedo en cualquier parte del dibujo, ¡siempre hay línea!
3. **La Prueba del Lápiz:** Si puedes dibujar todo el camino de la hormiguita **sin levantar tu lápiz del papel**, ¡entonces es una función continua!

Los 3 Secretos de la Hormiguita:

Para que un punto sea "perfecto" (continuo), ella revisa que:

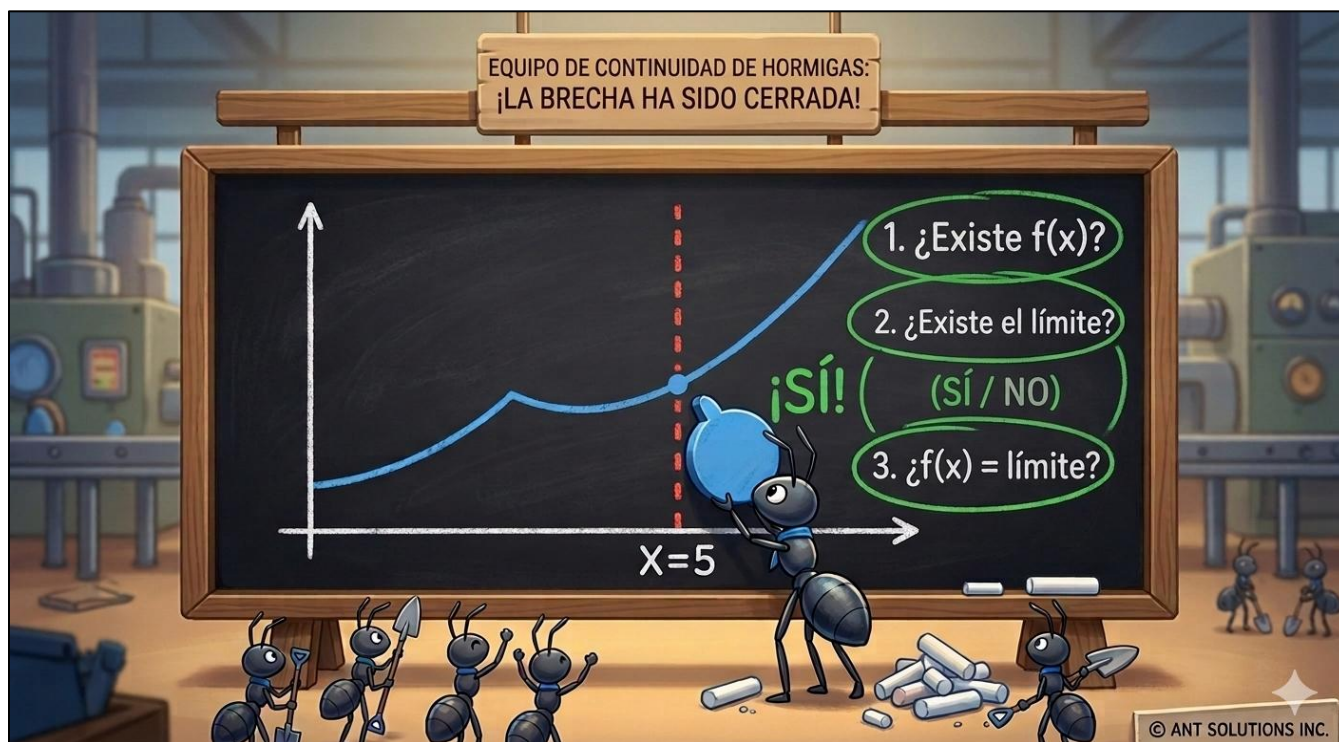
- **Haya suelo:** El punto tiene que existir en el mapa.
- **Los caminos se unan:** Si vienes por la izquierda o por la derecha, ¡llegas al mismo sitio!
- **Todo encaje:** No hay trampas ni agujeros escondidos.

Discontinuidad evitable

El límite existe pero $f(a)$ no está definida o es diferente. Se 'arregla' redefiniendo $f(a)$. En primaria: una gráfica con un 'huequito' en un punto — como una temperatura que no se registró un día.

Figura 28

Explora con la hormiga: la discontinuidad evitable



Imagina que el camino de la hormiguita es perfecto, pero justo en un punto... **¡falta un trocito de suelo!** Es como si alguien hubiera sacado un bocado pequeño del camino.

Se llama "**evitable**" porque es muy fácil de arreglar: solo hay que poner una "pieza de rompecabezas" (como la que tiene la hormiguita en tu imagen) para tapar el hueco.

¿Cómo lo reconoce la hormiguita científica?

1. **Hay un destino:** Si miras desde lejos, parece que el camino llega a un lugar exacto (el **límite sí existe**).
2. **Pero no hay suelo:** Al llegar justo a ese punto, ¡pum!, hay un agujerito (no existe o está en otro lado).
3. **¡Es fácil de reparar!:** Solo necesitas "rellenar" ese puntito y el camino vuelve a ser suave y continuo.

Discontinuidad de salto

Los límites laterales existen pero son distintos. La gráfica 'salta' de un valor a otro. En primaria: el precio de un producto que cambia bruscamente de un día para otro.

La Discontinuidad de Salto (¡El Escalón!)

Imagina que la hormiguita viene caminando muy contenta por su sendero, pero de repente... **¡el suelo se acaba!** Para poder seguir, tiene que dar un gran salto hacia arriba (o hacia abajo) a un camino nuevo.

Esto pasa cuando:

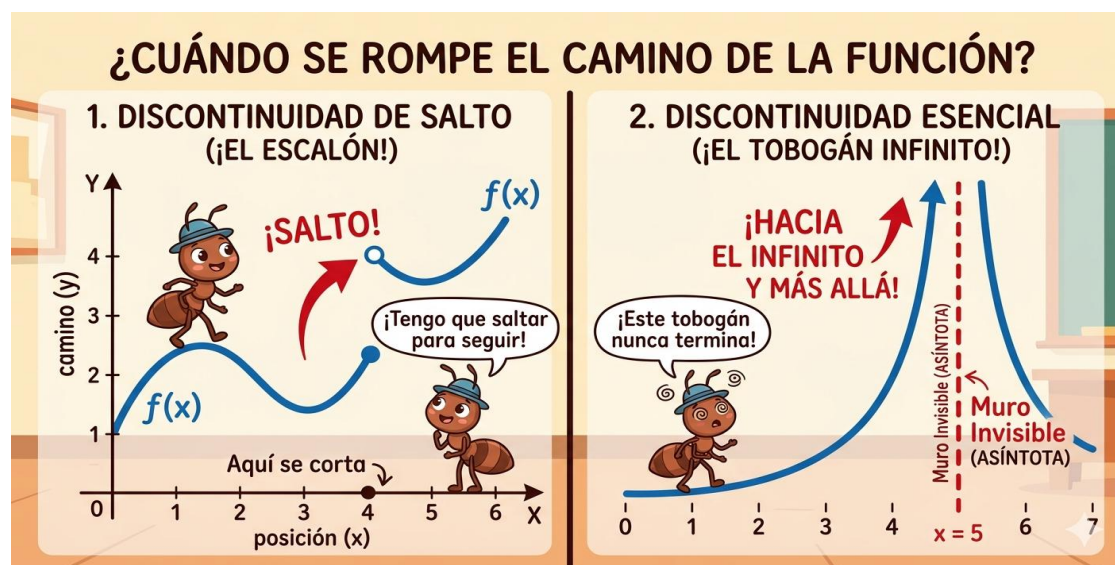
1. **Caminos separados:** Si una hormiguita viene por la izquierda y otra por la derecha, ¡no llegan al mismo sitio! (Los límites laterales son diferentes).
2. **No hay puente:** No importa cuánto cemento usen las hormiguitas, no pueden arreglarlo con un solo punto porque los dos caminos están a alturas distintas.
3. **El salto:** Es como un escalón gigante en medio de la montaña rusa.

Discontinuidad esencial

El límite no existe (la función oscila o se va al infinito). En primaria: datos estadísticos completamente erráticos sin patrón.

Figura 29

Explora con la hormiga: la discontinuidad de salto y la discontinuidad esencial



Teorema del valor intermedio

Si f es continua en $[a,b]$ y N es un valor entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = N$. 'Si algo pasó de 5 a 10, en algún momento valió 7.' En primaria: si un niño midió 1.20m en enero y 1.25m en julio, en algún mes midió 1.22m.

Figura 30

Explora con la hormiga: representación del teorema del valor medio



El Viaje del Coche "Mágico"

1. La Salida (Ciudad A): El velocímetro del coche marca 20 km/h justo al arrancar.
2. El Camino Curvo (Línea Azul): El coche acelera y frena todo el tiempo, pero el velocímetro nunca "salta" de un número a otro: pasa suavemente por todos los valores intermedios.
3. La Llegada (Ciudad B): El velocímetro del coche marca 80 km/h justo al terminar el viaje.
4. ¡El Momento Mágico!: El Teorema del Valor Intermedio nos asegura que, como la velocidad cambió de forma continua —sin saltos ni teletransportaciones— entre 20 km/h y 80 km/h, en algún instante el velocímetro marcó exactamente 50 km/h (¡y también pasó, en algún momento, por cualquier otro valor entre 20 y 80!).

SECUENCIA DIDÁCTICA CON ETAPAS EIS

Tabla 4:

Secuencia didáctica con enfoque en las etapas EIS para el aprendizaje de la continuidad

ETAPA	 ENACTIVA (Cuerpo en movimiento)	 ENACTIVA (Mesa de trabajo)	 ICÓNICA (Imágenes)	 SIMBÓLICA (Lenguaje formal)
Actividades	MOVIMIENTO CORPORAL: Actividad 'Trayectorias continuas y discontinuas': en el patio, los estudiantes trazan rutas con tiza. Ruta continua: caminar de A a B sin levantar el pie. Ruta discontinua: dar salto o regresar. Luego, simulan el crecimiento de un niño (datos OMS): cada estudiante representa un mes, parados en fila van creciendo gradualmente (continuo) vs. un salto brusco de talla (discontinuo).	MESA DE TRABAJO CONCRETO: Con papeles de diario recortados (tiras de temperatura/datos estadísticos) identifican visualmente si hay 'saltos'. Con plastilina o arcilla moldean una gráfica continua vs. una con hueco. Con bloques de madera o cartón construyen una 'escalera' (discontinuidad de salto) vs. una rampa (continua).	REPRESENTACIÓN ICÓNICA: Dibujan gráficas de las tres tipos de discontinuidad (evitable, salto, esencial) usando diferentes colores. Interpretan gráficos estadísticos reales de temperatura en Trujillo, crecimiento infantil, identificando visualmente continuidad o quiebres.	REPRESENTACIÓN SIMBÓLICA: Escriben la definición formal de continuidad (las tres condiciones). Verifican algebraicamente si funciones simples son continuas. Conectan con CNEB: 'representa datos con gráficos estadísticos y sustenta conclusiones' (4.º-6.º). Usan el lenguaje: continuo/discontinuo, salto, tendencia regular.

GRADO	¿QUÉ APRENDE EN PRIMARIA?	ACTIVIDAD EIS SUGERIDA	MATERIALES
1.º y 2.º	Trayectorias continuas: recorridos en el mapa del aula sin levantar el dedo. Caminos que van de un punto a otro sin interrupciones.	ENACTIVA: trazar con el dedo en el aire un camino continuo. ICONICA: dibujar la trayectoria en el mapa. SIMBOLICA: describir el recorrido con palabras.	Mapa del aula dibujado en cartón, fichas de inicio y fin.
3.º y 4.º	Gráficos de barras: identificar si los datos cambian de forma gradual o si hay saltos bruscos. Comparar datos de dos periodos.	ENACTIVA: ordenar en fila alumnos con distintas alturas. ICONICA: gráfico de barras con los datos. SIMBOLICA: calcular la diferencia entre barras.	Datos de talla de los alumnos, papel cuadriculado, lapiz.

5.º	Graficos lineales: identificar tendencias continuas. Distinguir graficas que suben gradualmente de las que tienen quiebres. Leer e interpretar datos estadísticos.	ENACTIVA: representar con el cuerpo el crecimiento gradual vs. el salto. ICONICA: grafico lineal con datos reales. SIMBOLICA: describir la tendencia con palabras y calcular variaciones.	Datos del INEI impresos, papel cuadriculado A4, regla.
6.º	Interpretar y sustentar conclusiones sobre graficos estadísticos. Identificar si los datos son continuos o hay quiebres y argumentar por que.	ENACTIVA: simular una crisis de precio con saltos bruscos. ICONICA: construir el grafico lineal con los datos. SIMBOLICA: redactar conclusiones usando el vocabulario matematico.	Datos reales de precios o temperatura de Trujillo, papel A3, marcadores.

MATERIALES EDUCATIVOS — DÍA 2 — MÓDULOS 3 y 4	
Materiales de reciclaje	Materiales a conseguir / comprar
Tiras de papel de periódico (para doblar a la mitad — actividad de Zeno de límites) Tapas de botellas en fila para simular secuencias que se aproximan Botellas plásticas de tamaños variados (para representar valores que crecen/decrecen) Arcilla o plastilina de colores (para modelar gráficas continuas y discontinuas) Cartón corrugado (para construir 'barrera' que represente la asíntota) Cinta de papel o masking tape para trazar trayectorias en el suelo del patio Tiza de colores (para trayectorias en el patio — actividad de continuidad) Envases de yogurt o cajas pequeñas (para representar 'valores' en la secuencia) Hojas de revistas con gráficas estadísticas reales (para análisis icónico)	Papel cuadriculado A4 — 2 hojas por estudiante (para gráficas de límites y continuidad) Lápices de colores (mínimo 4 colores: rojo para discontinuidades, azul para continuas, verde para asíntotas) Fichas de datos del INEI La Libertad (el facilitador imprime con anticipación) Regla y escuadra (1 por grupo para trazar rectas asíntota) Papel A3 en blanco (1 por grupo para construir la gráfica grande grupal) Marcador permanente negro (para las gráficas sobre cartulina) Cartulina de colores A4 (2 por grupo: una para gráfica continua, una para discontinua) Hilo o cordel (para representar la 'trayectoria' de una función sobre el suelo)

CAPÍTULO IV

Derivada, graficación e integración didáctica

Unidad III del sílabo DPM · Día 3 · Módulos 5, 6 y 7

DÍA 3

Derivada, Aplicaciones e Integración Didáctica

Unidad III del sílabo DPM | Competencias CNEB: Cantidad · Regularidad y cambio · Gestión de datos · Forma y movimiento

MÓDULO 5: Derivada — La Tasa de Cambio que Todo Docente de Primaria Debe Comprender

¿Por qué necesito aprender esto?

Cuando un niño de 5.º pregunta '¿cuánto creció el árbol este mes?' no está pidiendo el crecimiento total, sino el cambio en ese período. Cuando compara '¿en qué semana el niño de la gráfica creció más rápido?', está pensando en tasas de cambio. Eso es derivada. No vas a enseñar derivadas en primaria, pero entenderlas te permitirá enseñar la IDEA del cambio con profundidad y creatividad.

La investigación reciente confirma que este es un nudo crítico en la formación docente: Vargas González, Fernández-Plaza y Ruiz Hidalgo (2023) muestran que los futuros profesores de matemática con frecuencia manejan un significado incompleto de la derivada en un punto, centrado en el procedimiento algebraico y desconectado de la idea de razón de cambio instantánea. En esa línea, Fonseca y Henriques (2023) reportan que el uso guiado de GeoGebra ayuda a los docentes en formación a construir un significado más robusto de la razón de cambio instantánea antes de formalizarla simbólicamente, lo que respalda la secuencia EIS —de la tabla de variación (icónica) a la notación $f'(x)$ (simbólica)— que se desarrolla en este módulo.

DEFINICIONES CONCEPTUALES FUNDAMENTALES

Tasa de cambio promedio

$\Delta y / \Delta x = [f(x_2) - f(x_1)] / (x_2 - x_1)$. Cuánto cambia y en promedio por cada unidad de cambio en x entre dos puntos. En primaria: 'creció 3 cm en 6 meses = 0.5 cm por mes en promedio'.

Imagina que la hormiguita quiere ir desde el punto **A** hasta el punto **B** en su mapa de aventuras.

1. El Camino de la Hormiguita (Curva Azul)

La hormiguita no va en línea recta. A veces sube montañas muy rápido y a veces baja despacio por los valles. Esa línea azul es su **camino real**, lleno de subidas y bajadas.

2. El Atajo Mágico (Línea Roja Recta)

La **Tasa de Cambio Promedio** es como si trazáramos un puente invisible y recto desde donde empezó (A) hasta donde terminó (B). No nos importa si dio mil vueltas en el medio, solo miramos el inicio y el final.

3. ¿Qué nos dice este "puente"?

La inclinación de ese puente rojo nos dice **qué tan rápido subió en total**.

- Si el puente está muy empinado, la hormiguita subió mucho en promedio.
- Si el puente está casi plano, aunque haya subido y bajado montañas, al final terminó casi a la misma altura.

Tasa de cambio instantánea

La tasa de cambio en un instante exacto (no entre dos puntos). Es la derivada $f'(a)$. En primaria: '¿a qué velocidad estoy creciendo HOY?' (concepto intuitivo sin fórmula).

Figura 31

Explora con la hormiga: representación de la tasa de cambio instantánea



La Tasa de Cambio Instantánea (¡El "Justo Ahora"!)

Imagina que la hormiguita va por su camino azul (el **Camino Divertido**).

1. **El Velocímetro:** ¿Ves los relojitos (velocímetros) abajo en la imagen? Eso es la tasa instantánea. No nos dice el promedio de todo el viaje, nos dice **qué tan rápido va la hormiguita en ese mismísimo instante**.
2. **La Foto Flash:** Si le tomas una foto a la hormiguita mientras sube una cuesta, la **Tasa de Cambio Instantánea** es la inclinación de su camino justo en ese milímetro donde está parada.

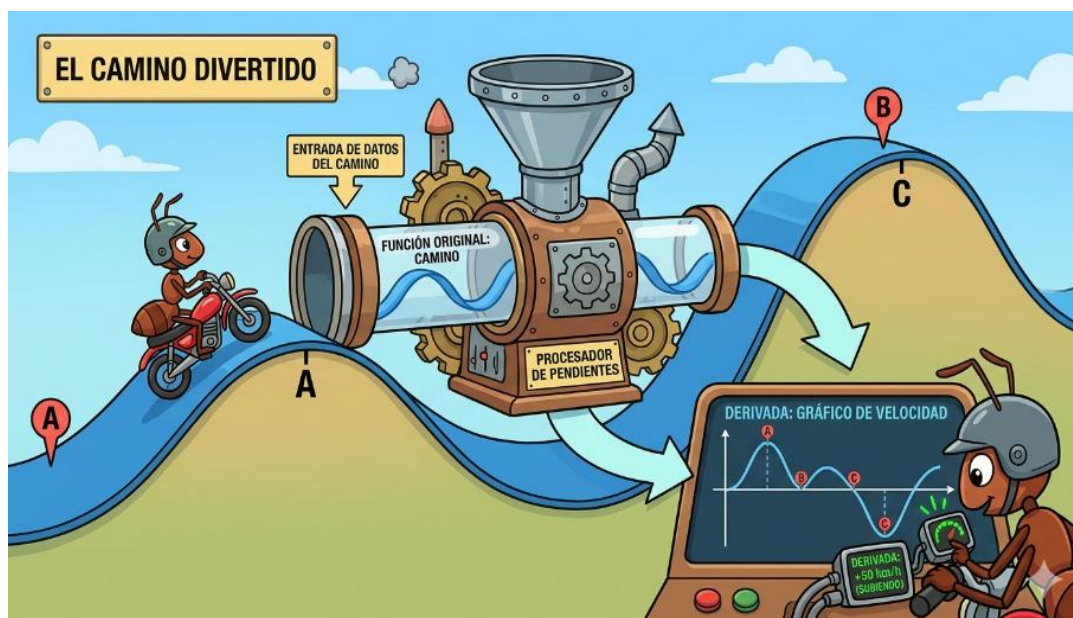
3. **La Regla Mágica (Tangente):** Mira a la hormiguita en el punto "c" (en el cuadro de la derecha). Ella está apoyando una regla que toca el camino en **un solo punto**. Esa inclinación de la regla es su "velocidad instantánea".

Derivada (definición formal)

$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} [f(x+h) - f(x)] / h$. Es el límite de la tasa de cambio promedio cuando el intervalo se hace infinitamente pequeño. La pendiente de la recta tangente a la curva en un punto.

Figura 32

Explora con la hormiga: la máquina de las derivadas



¿Cómo funciona "La Máquina de las Derivadas"?

Imagina que metemos el **Camino Divertido** de la hormiguita en esta máquina mágica:

1. **Entrada (La Función):** Metemos el mapa de todas las montañas y valles por donde viaja la hormiguita.
2. **El Proceso (Derivar):** La máquina analiza punto por punto qué tan empinado está el suelo. Es como si la máquina preguntara en cada milímetro: "*¿Hacia dónde apunta la moto ahora?*".
3. **Salida (La Derivada):** La máquina nos entrega una nueva información: **¡La velocidad y la dirección!**
 - Si la máquina nos da un número **alto**, la hormiguita está en una subida muy fuerte.
 - Si nos da **cero**, la hormiguita está descansando en la cima plana.
 - Si nos da un número **negativo**, la hormiguita está bajando a toda mecha

Regla de la potencia

Si $f(x) = x^n$ entonces $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$. La derivada de x^3 es $3x^2$. En primaria: cómo crece el área de un cuadrado cuando aumenta su lado: $A = L^2$, $dA/dL = 2L$.

Figura 33

Explora con la hormiga: representación de la regla de la potencia en derivadas



La Regla de la Mochila (Paso a Paso)

Imagina que la hormiguita tiene una función como

. Para derivarla, la "Máquina de Pendientes" de tu dibujo hace lo siguiente:

1. **¡El Salto del Exponente!**: El número pequeño que está arriba (el **3**) se emociona y da un salto mortal hacia adelante. Ahora se pone frente a la

para multiplicar:

2. **La Mochila se vuelve ligera**: Como el número saltó, el espacio que dejó arriba se hace más pequeño. Siempre le restamos **1**. Así que

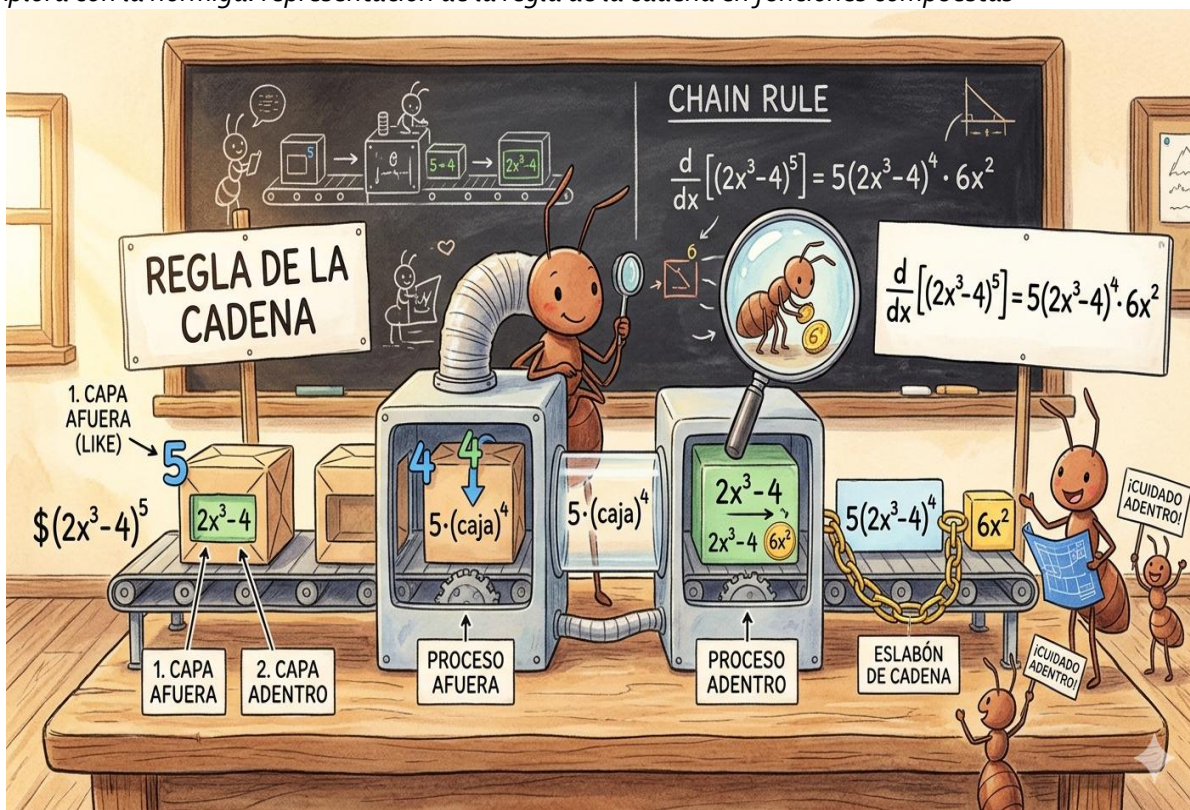
¡Resultado Mágico!: La derivada de es

Derivada de función compuesta

Regla de la cadena: $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$. 'Derivar el de afuera, dejar el de adentro, derivar el de adentro.' En primaria: si la temperatura depende de la altitud y la altitud del mes, ¿cómo cambia la temperatura respecto al mes?

Figura 34

Explora con la hormiga: representación de la regla de la cadena en funciones compuestas



Valor máximo y mínimo

Puntos donde $f'(x) = 0$ y $f''(x) < 0$ (máximo) o $f''(x) > 0$ (mínimo). En primaria: 'el punto más alto de una trayectoria', '¿en qué momento tiene más temperatura el día?', '¿cuándo es mayor la cantidad de agua en el tanque?'

Figura 35

Explora con la hormiga: representación del valor máximo y mínimo



Mapa de los Tesoros: Máximos y Mínimos

Imagina que este es el sendero que recorre la hormiguita motorista:

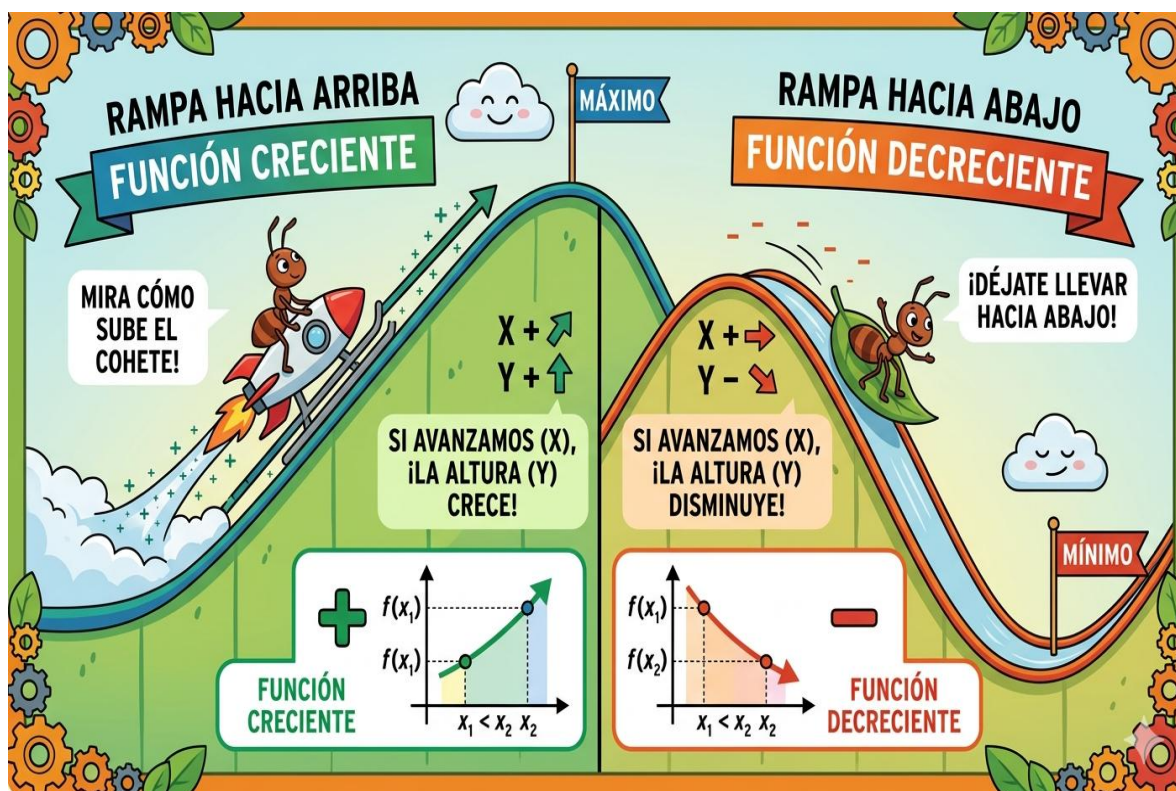
1. **El Punto Máximo:**
 - Es el lugar más alto de la colina, justo donde puedes ver todo el paisaje.
 - **El secreto:** Al llegar a la punta, la moto no está subiendo ni bajando. Por un segundo, está **perfectamente plana** (su inclinación o derivada es 0).
2. **El Punto Mínimo:**
 - Es el fondo del valle, el punto más bajo antes de volver a subir.
 - **El secreto:** Igual que en la cima, en el fondo la moto se queda **derechita** por un instante antes de empezar la siguiente cuesta. Aquí la inclinación también es 0.
 - **¿Por qué esto es importante?**
 - **En la subida:** La hormiguita tiene que acelerar (derivada positiva).
 - **En la bajada:** La hormiguita puede dejarse llevar (derivada negativa).
 - **En los puntos críticos:** ¡Es el momento de descanso donde la inclinación es cero!

**Función creciente /
decreciente**

Si $f'(x) > 0$ en un intervalo, f crece ahí. Si $f'(x) < 0$, decrece. En primaria: leer gráficas e identificar 'sube', 'baja', 'está constante'.

Figura 36

Explora con la hormiga: representación de la función creciente y decreciente

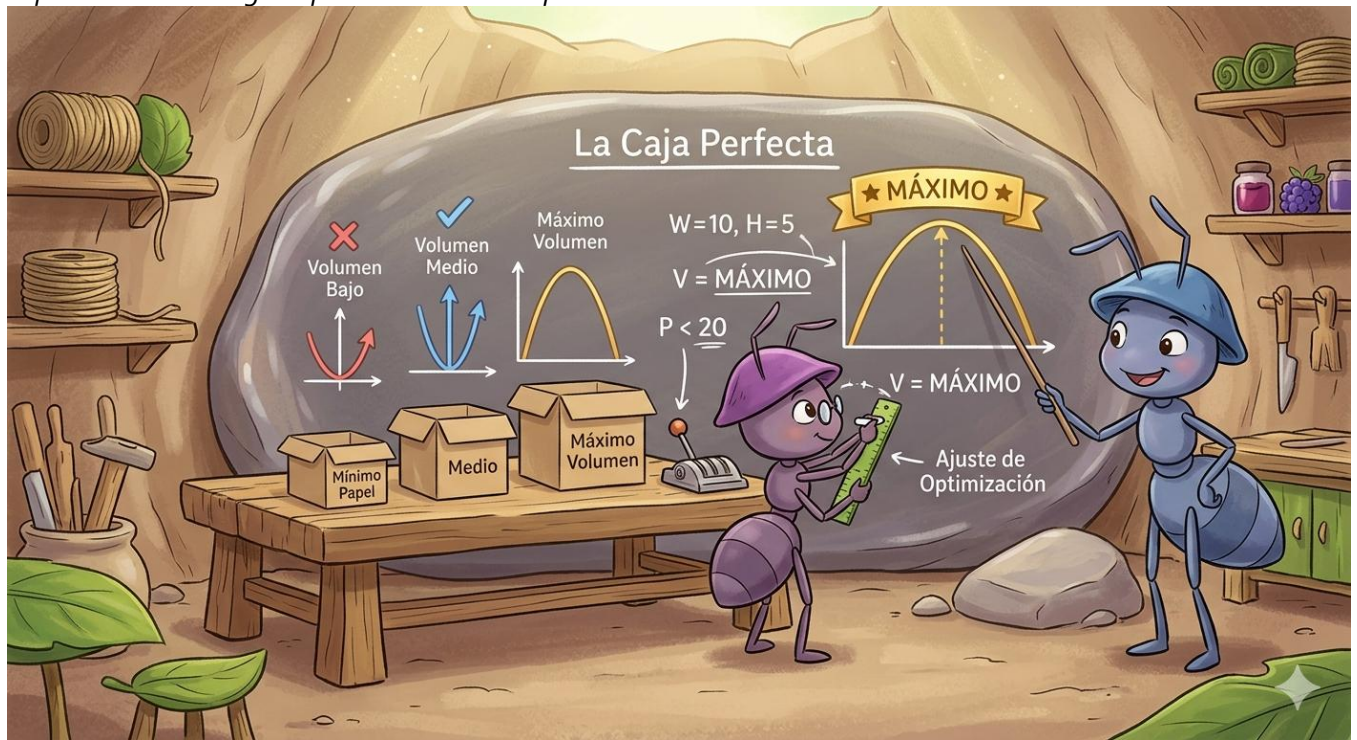


Optimización

Encontrar el valor máximo o mínimo de una función en un contexto real. En primaria: ¿cuál es el mayor rectángulo que puedo formar con 20 cm de alambre? ¿En qué momento llega más luz solar al aula?

Figura 37

Explora con la hormiga: representación de la optimización



Imagina que la hormiguita quiere fabricar una cajita para guardar sus migajas de pan. Optimizar sería encontrar las medidas exactas para que en la caja quepa mucha comida (Maximizar Volumen) pero usando poquito papel para construirla (Minimizar Material).

SECUENCIA DIDÁCTICA CON ETAPAS EIS

Tabla 5:

Secuencia didáctica con enfoque en las etapas EIS para el aprendizaje de derivadas

ETAPA	ENACTIVA (Cuerpo en movimiento)	ENACTIVA (Mesa de trabajo)	ICÓNICA (Imágenes)	SIMBÓLICA (Lenguaje formal)
Actividades	MOVIMIENTO CORPORAL: Actividad 'Caminar más rápido o más lento': los estudiantes caminan por el aula a distintas velocidades (lento=función decrece, rápido=función crece, detenidos=máximo o mínimo). Otro estudiante observa y anota 'sube' o 'baja'. Actividad 'El termómetro humano': una fila de estudiantes a diferentes alturas representa valores de temperatura a lo largo del día; identifican el 'máximo' (persona más alta) y el 'mínimo'.	MESA DE TRABAJO CONCRETO: Con bloques o cubos de cartón reciclado construyen escalones de altura creciente (función creciente) y decreciente. Miden la 'pendiente' de cada tramo con regla. Con fichas y papel cuadriculado representan el crecimiento semanal de talla de un niño (datos OMS): calculan cuánto creció entre semana 1 y 2, 2 y 3 (tasa de cambio promedio).	REPRESENTACIÓN ICÓNICA: Dibujan la gráfica de talla vs. tiempo. Trazan la recta tangente en diferentes puntos (con regla). Colorean de verde los tramos crecientes y rojo los decrecientes. Identifican visualmente el máximo y mínimo con marcador. Relacionan con gráficas del CNEB de barras y lineales.	REPRESENTACIÓN SIMBÓLICA: Calculan $f'(x)$ con reglas básicas. Verifican algebraicamente dónde $f'(x)=0$. Conectan con CNEB 5.º-6.º: 'estima, mide y calcula variaciones de magnitudes (velocidad, crecimiento, temperatura)'. Usan tabla: $x \mid f(x) \mid \Delta f/\Delta x$ para tasa de cambio promedio.

GRADO	¿QUÉ APRENDE EN PRIMARIA?	ACTIVIDAD EIS SUGERIDA	MATERIALES
1.º y 2.º	Comparar cantidades: ¿cuál es más grande? ¿cuál es más pequeño? ¿cuál crece más? La idea del cambio empieza aquí de forma cualitativa.	ENACTIVA: comparar alturas de alumnos con la mano. ICONICA: dibujar las barras de altura. SIMBOLICA: escribir $>$ o $<$ entre cantidades.	Cubos de cartón de distintos tamaños, lápices de colores.
3.º y 4.º	variación de cantidades: cuanto cambio algo de un periodo a otro. Calcular la diferencia entre dos medidas. No se llama tasa de cambio pero lo es.	ENACTIVA: medir la planta del salón semana a semana. ICONICA: registrar en tabla y graficar. SIMBOLICA: calcular la diferencia: talla final - talla inicial.	Planta del salón, regla, tabla de registro en papel bond.

5.º	Tasa de cambio promedio en situaciones reales (crecimiento, precios, temperatura). Calcular cuánto cambia una magnitud por unidad de otra (cm por semana, soles por kg).	ENACTIVA: simulación de mercado con precios que cambian. ICONICA: grafico lineal de los datos. SIMBOLICA: calcular $\Delta y/\Delta x$ entre dos puntos de la tabla.	Datos reales de precio de productos básicos, papel cuadriculado.
6.º	Identificar el máximo y el mínimo de una gráfica. Argumentar en que momento algo creció más rápido o más lento. Resolver problemas de optimización sencilla.	ENACTIVA: 'el termómetro humano' con datos reales. ICONICA: graficar y marcar máximo y mínimo. SIMBOLICA: describir con palabras y calcular la tasa en cada intervalo.	Datos OMS de crecimiento infantil impresos, papel cuadriculado A3.

MÓDULO 6: Gráficas de Funciones con Derivadas — Visualización Matemática en el Aula

¿Por qué necesito aprender esto?

Un buen docente de primaria no solo hace que los niños CONSTRUYAN gráficas, sino que los ayuda a LEERLAS con sentido crítico. Para eso necesitas saber qué información está 'escondida' en una gráfica: si sube, si baja, cuándo cambia de comportamiento, cuál es el punto más alto o más bajo. Eso es exactamente lo que estudia este módulo, usando las derivadas como herramienta de análisis.

DEFINICIONES CONCEPTUALES FUNDAMENTALES

Análisis de una gráfica

Proceso de identificar: dominio, rango, intervalos de crecimiento/decrecimiento, máximos y mínimos, puntos de inflexión, asíntotas y comportamiento al infinito. En primaria: 'leer e interpretar una gráfica de barras o lineal'.

Figura 38

Explora con la hormiga: análisis de una gráfica



Imagina que la gráfica es el **mapa de una montaña** que nos dice cuánta comida cabe en sus cajas.

Aquí tienes los pasos para analizarla como todo un experto:

1. El Título y los Ejes (¿De qué trata el mapa?)

Lo primero que hace la hormiguita de azul es leer el título: "**La Caja Perfecta**".

- La línea que va hacia arriba nos dice el **Volumen** (cuánta comida cabe).
- La línea que va hacia la derecha nos dice el **Ancho** de la caja.
- **Análisis:** Si la línea de la gráfica sube, ¿cabe más comida!

2. El Punto Máximo (¡La Cima de la Montaña!)

¿Ves donde la hormiguita señala con su varita? Es el punto más alto de la curva amarilla.

- **¿Qué significa?:** Es el tamaño exacto de la caja donde cabe la **mayor cantidad de comida** posible.
- **En la gráfica:** Es el pico. Si la caja es más flaca o más gorda que eso, el volumen empieza a bajar (como se ve en las gráficas de la izquierda con la "X" roja).

3. Las Zonas de la Gráfica (Subidas y Bajadas)

- **Zona Creciente:** A la izquierda del pico, la línea va hacia arriba. Significa que si haces la caja un poquito más ancha, te cabe más comida.
- **Zona Decreciente:** A la derecha del pico, la línea baja. Significa que te pasaste de tamaño y ahora la caja es menos eficiente.

4. El Ajuste de Optimización (¡El toque final!)

Mira a la hormiguita de morado con su regla. Ella está haciendo el "**Ajuste de Optimización**".

- Su trabajo es mover las medidas hasta que la "flecha de volumen" llegue justo al punto **MÁXIMO**.
- Ella analiza los números (para que la caja no gaste mucho papel pero guarde todos los suministros de la colonia.

Punto de inflexión	Punto donde la concavidad de la gráfica cambia (de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo o viceversa). $f''(x) = 0$. En primaria: 'el momento donde la tendencia de crecimiento cambia de ritmo'.
--------------------	---

Figura 39

Explora con la hormiga: representación del punto de inflexión



Imagina que la hormiguita motorista va por una montaña rusa. El punto de inflexión es el lugar exacto donde el camino **cambia su forma de curvarse**.

1. **La Cueva (Cóncava hacia abajo:** Mira el inicio de la gráfica amarilla en tu imagen. Al principio, la curva parece el techo de una cueva o un paraguas abierto. La hormiguita siente que el camino la empuja hacia abajo.

2. **El Tobogán (Cóncava hacia arriba):** Imagina que después de bajar, el camino se curva como una "U" o una sonrisa para volver a subir.
3. **El Momento del Cambio: El Punto de Inflexión** es ese punto mágico donde dejas de estar en una curva tipo "cueva" y empiezas a estar en una curva tipo "sonrisa".
- 4.

Concavidad hacia arriba	$f''(x) > 0$: la gráfica tiene forma de 'cuenca' (U). Las tasas de cambio aumentan. En primaria: crecimiento que se acelera (como el precio de algo que sube cada vez más rápido).
Concavidad hacia abajo	$f''(x) < 0$: la gráfica tiene forma de 'sombrero' ($\cap$). Las tasas de cambio disminuyen. En primaria: crecimiento que se desacelera (como el aprendizaje de una habilidad: al principio se aprende rápido, luego más lento).

Figura 4o

Explora con la hormiga: representación de la concavidad y sus tipos



Concavidad hacia abajo (La Montaña o el Paraguas)

Mira la parte de la gráfica que dice "**MÁS ESFUERZO**" (la zona naranja).

- **La Forma:** El camino se curva como el techo de una cueva o un paraguas abierto. Si le dibujaras ojos, ¡parecería una cara triste!
- **¿Qué siente la hormiguita?:** Siente que el camino se va "doblando" hacia el suelo. Empieza subiendo muy rápido, pero cada vez le cuesta más y se va aplanando hasta llegar a la cima.

- **En tu imagen:** Es toda la parte naranja antes del punto de inflexión.
Concavidad hacia arriba (El Valle o la Cuchara)

Ahora imagina que el camino se curva al revés, como la zona de **"RITMO MÁS CONSTANTE"** si siguiera bajando y luego subiera.

- **La Forma:** El camino se curva como un tazón, una cuchara o una sonrisa gigante.
- **¿Qué siente la hormiguita?:** Siente que el camino la "sostiene". Si soltara una miguita de pan, rodaría hacia el centro del tazón.
- **En tu imagen:** El punto de inflexión es donde la hormiguita decide dejar de estar en una "montaña" para pasar a un camino más suave.

SECUENCIA DIDÁCTICA CON ETAPAS EIS

Tabla 6:

Secuencia didáctica con enfoque en las etapas EIS para el aprendizaje de gráficas de funciones con derivadas

ETAPA	ENACTIVA (Cuerpo en movimiento)	ENACTIVA (Mesa de trabajo)	ICÓNICA (Imágenes)	SIMBÓLICA (Lenguaje formal)
Actividades	MOVIMIENTO CORPORAL: Actividad 'Somos la gráfica': se dibuja en el suelo del aula (con cinta) un eje x. Los estudiantes se posicionan en diferentes puntos del eje. Cada uno indica con su brazo la 'pendiente' en ese punto (brazo horizontal = cero, brazo inclinado arriba = positiva, abajo = negativa). Otro grupo adivina qué función están representando.	MESA DE TRABAJO CONCRETO: Con papel cuadriculado y fichas de cartón con coordenadas, construyen punto a punto la gráfica de una función. Usan hilo/lana para trazar la curva entre los puntos. Identifican con tarjetas de colores: rojo=decreciente, verde=creciente, amarillo=máximo/mínimo.	REPRESENTACIÓN ICÓNICA: Trazan e interpretan gráficas con GeoGebra (software libre, si hay tablets) o a mano en papel cuadriculado A3 del grupo. Comparan la gráfica de f , f' y f'' visualmente. Diseñan preguntas pedagógicas: '¿Qué le preguntaría a mis alumnos de 5.º sobre esta gráfica?'	REPRESENTACIÓN SIMBÓLICA: Escriben el análisis completo: dominio, rango, crecimiento/decrecimiento (con desigualdades), máximos/mínimos (coordenadas), asíntotas (ecuación de recta). Conectan con el CNEB: 'construye e interpreta gráficas lineales; identifica tendencias' (4.º-6.º). Elaboran el set de actividades por grado.

GRADO	¿QUÉ APRENDE EN PRIMARIA?	ACTIVIDADES SUGERIDAS	MATERIALES
1.º y 2.º	Grafico de barras simple con datos del aula. Identificar la barra mas alta y la mas baja. Responder preguntas sobre la grafica.	ENACTIVA: poner torres de cubos de distintas alturas. ICONICA: dibujar el grafico de barras. SIMBOLICA: escribir el nombre del dato mas alto y mas bajo.	Cubos de carton, papel cuadriculado, lapices de colores.
3.º y 4.º	Graficos de barras dobles o pictogramas. Comparar dos grupos de datos. Identificar diferencias y similitudes entre graficas.	ENACTIVA: poner dos filas de cubos para comparar. ICONICA: grafico de doble barra. SIMBOLICA: calcular la diferencia entre los dos grupos.	Cubos de dos colores, papel cuadriculado, plumones.
5.º	Graficos lineales: leer, interpretar y describir la tendencia. Identificar puntos clave (maximo, minimo, quiebre). Usar vocabulario matematico preciso.	ENACTIVA: representar la curva con el cuerpo en el suelo. ICONICA: grafico lineal con datos reales. SIMBOLICA: describir la tendencia por escrito.	Datos reales del INEI o SENAMHI, papel cuadriculado A4.
6.º	Construir, interpretar y sustentar conclusiones sobre graficas lineales con multiples datos. Identificar concavidades (crece rapido vs. crece despacio). Predecir valores futuros.	ENACTIVA: 'somos la grafica' en el piso del aula. ICONICA: grafico completo con colores segun analisis. SIMBOLICA: redactar el analisis y las predicciones.	Papel cuadriculado A3, plumones de colores, GeoGebra en tablet (opcional).

MÓDULO 7: Integración Didáctica — Diseño de Unidad de Aprendizaje Articulada

¿Por qué necesito aprender esto?

Estos tres días aprendiste mucho de matemática. Ahora llega el momento más importante: convertir ese aprendizaje en una UNIDAD DE APRENDIZAJE que podrás usar en tu futura aula. No es solo completar un formato. Es pensar como docente: ¿qué quiero que aprendan mis alumnos?, ¿cómo lo voy a presentar?, ¿cómo sabré que aprendieron? Aquí aprenderás los conceptos curriculares que necesitas para diseñar una clase de matemática con calidad.

DEFINICIONES CONCEPTUALES FUNDAMENTALES PARA LA PLANIFICACIÓN CURRICULAR

Unidad de aprendizaje (CNEB)	Documento de planificación curricular de mediano plazo que organiza un conjunto de sesiones de aprendizaje articuladas en torno a una situación significativa. Contiene: título, situación significativa, competencias/capacidades/desempeños, evidencias de aprendizaje, criterios de evaluación e instrumento de evaluación.
Situación significativa	Contexto real, retador y relevante que genera necesidad de aprender. Activa las competencias matemáticas. En primaria: 'Organizamos la feria del colegio: ¿cuántos productos necesitamos y a qué precio para no perder dinero?' (involucra funciones y optimización).
Desempeño de grado	Descripción observable y verificable de lo que hace el estudiante cuando desarrolla una capacidad en un grado específico. Son los indicadores del logro de la competencia. Constituyen la base de la evaluación formativa en el CNEB.
Los 4 procesos didácticos del área de Matemática (CNEB)	(1) Problemатización: presentar la situación significativa. (2) Búsqueda y ejecución de estrategias: el estudiante experimenta, prueba, usa materiales. (3) Socialización de representaciones: comparten y comunican sus métodos. (4) Reflexión y formalización: sistematizan el aprendizaje y conectan con el conocimiento formal.
Evaluación formativa	Proceso continuo de recojo y valoración de evidencias del aprendizaje para retroalimentar y tomar decisiones pedagógicas. No es una nota al final — es información para mejorar el proceso. En el CNEB: usa rúbricas, listas de cotejo, portafolios y observación directa.

SECUENCIA DIDÁCTICA CON ETAPAS EIS

Tabla 7:

Secuencia didáctica con enfoque en las etapas EIS para la planificación curricular

ETAPA	 ENACTIVA (Cuerpo en movimiento)	 ENACTIVA (Mesa de trabajo)	 ICÓNICA (Imágenes)	 SIMBÓLICA (Lenguaje formal)
Actividades	MOVIMIENTO CORPORAL: Actividad de integración: 'El mercado matemático'. Los estudiantes simulan una situación de planificación de feria escolar en el patio. Cada grupo representa: vendedores (funciones lineales de precio), compradores (proporcionalidad), contador (optimización). Se mueven, negocian, registran. Vivencian el contexto antes de planificarlo.	MESA DE TRABAJO CONCRETO: Con fichas, tarjetas y material concreto diseñan las actividades de las sesiones de su Unidad de Aprendizaje. Seleccionan físicamente los materiales que usarán sus alumnos. Organizan la secuencia de módulos con tarjetas que pueden reordenarse (pensamiento de diseño curricular).	REPRESENTACIÓN ICÓNICA: Elaboran el mapa de articulación DPM-CNEB en papel A3 grupal. Diseñan el esquema visual de su Unidad de Aprendizaje (diagrama de flujo de sesiones). Elaboran el set de actividades gráficas para distintos grados con sus respectivas preguntas pedagógicas.	REPRESENTACIÓN SIMBÓLICA: Completan el formato MINEDU de Unidad de Aprendizaje: título, situación significativa, competencias, capacidades, desempeños por grado, evidencias, criterios de evaluación, instrumento. Redactan con lenguaje curricular preciso. Integran al menos dos bloques del sílabo DPM.

MATERIALES EDUCATIVOS — DÍA 3 — MÓDULOS 5, 6 y 7

Materiales de reciclaje	Materiales a conseguir / comprar
Bloques o cubos de cartón de diferentes tamaños (para representar valores crecientes/decrecientes) Cinta de papel (masking tape) para trazar ejes en el suelo del aula Tapas de botellas y semillas (para calcular tasa de cambio promedio concretamente) Periódicos y revistas con datos estadísticos reales (temperatura, precios, crecimiento) Cajas de cartón para simular el 'mercado matemático' del módulo 7 Hilo o lana de colores (para trazar curvas entre puntos en el papel cuadriculado A3) Cartón de cajas de zapatos cortado en tarjetas para planificación curricular Envases de plástico con etiquetas recicladas (para el juego del mercado) Botellas plásticas de distintas alturas (para representar el 'termómetro humano')	Papel cuadriculado A3 (1 hoja por grupo, para la gráfica grande) Papel cuadriculado A4 (2 hojas por estudiante — análisis de gráficas) Fichas de datos OMS de crecimiento infantil (el facilitador las imprime) Plumones de colores (verde, rojo, amarillo, azul — para el código de análisis de gráficas) Tablets o laptops con GeoGebra gratuito instalado (mínimo 1 por grupo de 4) Formato MINEDU de Unidad de Aprendizaje impreso (1 por grupo — lo prepara el facilitador) Papel bond A4 (para redactar la Unidad de Aprendizaje final) Sobre manila (para el portafolio final — 1 por estudiante) Post-its o tarjetas adhesivas de colores (para el diseño colaborativo curricular)

RESUMEN INTEGRADO DE MATERIALES — LOS TRES DÍAS

La siguiente tabla consolida todos los materiales que los estudiantes-docentes deben traer organizados en su mochila de trabajo para cada jornada. Se distingue entre materiales de reciclaje (gratuitos, de casa) y materiales básicos de papelería.

MATERIALES DE RECICLAJE — TRAER DE CASA (Los 3 días)
♦ Cajas de cartón pequeñas (cajas de remedios, jabón, cereales, zapatos): mínimo 3
♦ Tapas de botellas plásticas de colores variados: mínimo 30 tapas por estudiante
♦ Frijoles, lentejas, piedritas, semillas secas surtidas: en bolsita ziploc o bolsa plástica
♦ Periódicos y revistas viejas con datos numéricos, tablas, gráficas
♦ Trozos de lana o cordel de distintos colores: aprox. 1 metro de cada color
♦ Botellas plásticas limpias de distintos tamaños (250 ml, 500 ml, 1L)
♦ Bolsas plásticas pequeñas con cierre (tipo ziploc) para guardar fichas
♦ Envases de yogurt limpios y secos: mínimo 2
♦ Arcilla o plastilina de colores: 1 paquete pequeño
♦ Tiza de colores (si tienen en casa): 4-5 tizas

MATERIALES BÁSICOS DE PAPELERÍA — TRAER O COMPRAR
♦ Papel cuadriculado A4: mínimo 6 hojas (2 por día)
♦ Papel bond A4 en blanco: mínimo 5 hojas
♦ Plumones delgados de colores: set de 4 colores mínimo (verde, rojo, azul, negro)
♦ Lápiz de grafito y borrador
♦ Regla de 30 cm
♦ Tijeras (1 por estudiante)
♦ Masking tape o cinta adhesiva (1 rollo pequeño por grupo — pueden compartir)
♦ Cartulina de colores A4: mínimo 4 hojas de distintos colores
♦ Post-its o papel adhesivo de colores (si tienen acceso): 1 bloc pequeño
♦ Sobre manila A4 para el portafolio final (Día 3)
♦ Su sílabo DPM impreso (para consulta permanente)

RECURSOS DIGITALES (Día 3 — traer si tienen)

- ◆ Laptop o tablet personal con GeoGebra instalado (www.geogebra.org — descarga gratuita)
- ◆ Teléfono inteligente con GeoGebra app (disponible gratis en Play Store / App Store)
- ◆ Cable USB o adaptador si necesitan cargar el equipo durante la jornada
- ◆ Cuenta de correo electrónico activa para recibir materiales del facilitador

CAPÍTULO V

Diseño e implementación de la Unidad Didáctica

"Descubrimos las reglas que gobiernan el mundo"

UNIDAD DIDÁCTICA

Descubrimos las Reglas que Gobiernan el Mundo

*Funciones, Cambio y Pensamiento Matemático
articulados con el CNEB — Educación Primaria 1.º al 6.º grado*

3 días
De taller

7 Módulos
de aprendizaje

6 Grados
1.º al 6.º



Enfoque
Etapas EIS de Bruner: Enactiva · Icónica · Simbólica



Área
Matemática (Desarrollo del Pensamiento Matemático)



Año lectivo

2026 — I Trujillo, Perú



I. DATOS GENERALES DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

Institución educativa	Universidad Nacional de Trujillo - Práctica en Educación Primaria
Área curricular	Matemática
Grados	1.º — 2.º — 3.º — 4.º — 5.º — 6.º de Educación Primaria
Ciclos CNEB	III (1.º-2.º) · IV (3.º-4.º) · V (5.º-6.º)
Duración total	3 días de taller · 7 módulos · aprox. 18 horas pedagógicas

Docente responsable	Equipo docente del Departamento de Ciencias de la Educación — UNT (véase autoría)
Enfoque pedagógico	Etapas Cognitivas EIS — Bruner (1966): Enactiva → Icónica → Simbólica
Currículo de referencia	Currículo Nacional de Educación Básica (CNEB) — MINEDU Perú
Año lectivo	2026 — I Semestre

II. PRESENTACIÓN Y FUNDAMENTACIÓN

¿De qué trata esta Unidad Didáctica?

Esta Unidad Didáctica lleva por nombre "**Descubrimos las Reglas que Gobiernan el Mundo**" porque su propósito central es que los estudiantes —futuros docentes de primaria— descubran que detrás de cada situación cotidiana (los precios del mercado, el crecimiento de una planta, la temperatura del día) existe una regla matemática que puede expresarse, graficarse y enseñarse.

La unidad abarca tres grandes bloques matemáticos: **Funciones y Relaciones (Día 1)**, **Límite y Continuidad (Día 2)** y **Derivada e Integración Didáctica (Día 3)**. Estos contenidos del área de Desarrollo del Pensamiento Matemático (DPM) se articulan directamente con las competencias, capacidades y desempeños del CNEB para cada grado de primaria.

El enfoque pedagógico es el modelo de **Etapas EIS de Jerome Bruner (1966)**: todo concepto matemático se aprende primero con el cuerpo (Enactiva), luego con imágenes y diagramas (Icónica) y finalmente con símbolos y fórmulas (Simbólica). Esta secuencia no es optativa — es la base cognitiva del aprendizaje significativo (Ruiz, Romero, Vasco y Paucar (2024)).

¿Por qué es importante para un futuro docente de primaria?

Un docente que comprende la estructura matemática subyacente a los contenidos que enseña puede formular mejores preguntas, diseñar mejores actividades y anticipar los errores de sus estudiantes. No se trata de enseñar cálculo diferencial en primaria — se trata de entender por qué la 'tabla del 3' es una función, por qué la 'regla de tres' es proporcionalidad directa, y por qué 'leer una gráfica' involucra razonamiento sobre límites y continuidad.

Nota sobre los dos niveles de esta Unidad Didáctica: las secciones III a VI que siguen están redactadas desde la perspectiva del aula real de primaria —con "estudiantes" refiriéndose a los niños de 1.º a 6.º grado del C.E. "Los Matemáticos del Mañana"—, pues este es el plan de sesión que el docente en formación diseña durante el taller para implementarlo posteriormente con sus propios estudiantes durante su práctica pre-profesional. Durante las tres jornadas del taller (Capítulos II a IV), en cambio, es el propio docente en formación quien recorre la progresión EIS en el rol de aprendiz, para luego adaptar y aplicar esta misma Unidad con sus estudiantes de primaria.

III. SITUACIÓN SIGNIFICATIVA

La Gran Feria Escolar de Matemática

Los estudiantes de primaria del C.E. 'Los Matemáticos del Mañana' quieren organizar una **feria escolar** para recaudar fondos para su biblioteca. Pero hay un problema: no saben cómo fijar los precios para no perder dinero, no saben cuántas unidades producir para maximizar las ganancias, y no saben cómo presentar los datos de ventas a los padres de familia en gráficas claras.

¿Cómo pueden las matemáticas ayudar a organizar esta feria de la forma más justa y eficiente posible?

Reto del Día 1

¿Cuál es la REGLA de precios de tu producto? (Funciones)

Reto del Día 2

¿Las ventas son continuas o hay 'saltos'?
¿Hacia dónde TIENDE la demanda?
(Límite y continuidad)

Reto del Día 3

¿En qué momento ganamos MÁS?
¿Cómo presentamos los resultados?
(Derivada y visualización)

¿Por qué esta situación es significativa?

Porque involucra dinero real, decisiones reales y presentaciones reales — tres elementos que los niños de primaria encuentran completamente relevantes. Además, activa de forma natural las 4 competencias matemáticas del CNEB: **Cantidad** (precios y ganancias), **Regularidad y cambio** (reglas de correspondencia), **Gestión de datos** (gráficas y estadística) y **Forma y movimiento** (geometría de las gráficas).

IV. PROPÓSITOS DE APRENDIZAJE Y EVIDENCIAS

4.1 Competencias y capacidades del CNEB

COMPETENCIA CNEB	CAPACIDADES QUE ACTIVA	MÓDULOS DPM VINCULADOS
Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio	Matematiza situaciones · Comunica comprensión · Usa estrategias · Razona y argumenta	Módulos 1, 2, 5
Resuelve problemas de cantidad	Matematiza situaciones · Usa estrategias · Razona y argumenta	Módulos 1, 2
Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre	Comunica comprensión · Usa estrategias	Módulos 3, 4, 6
Resuelve problemas de forma, movimiento y localización	Comunica comprensión · Razona y argumenta	Módulos 5, 6

4.2 Desempeños por grado (extraídos del CNEB)

CICLO	GRADO	DESEMPEÑO CNEB (Regularidad y cambio)	CONEXIÓN CON DPM
III	1.º y 2.º	Identifica datos en problemas que presentan modelo de repetición (hasta 3 elementos) o de recurrencia, y los expresa en patrones de repetición.	Par ordenado vivido con el cuerpo. La posición en el patrón es el 'dominio' y el elemento es el 'rango'.
IV	3.º y 4.º	Establece relaciones entre los datos de una situación de equivalencia y los expresa en un modelo de ecuación o función con una operación.	Función $f(x) = nx$. Tabla T como representación icónica. Proporcionalidad directa simple.
V	5.º	Establece relaciones entre datos de una situación de regularidad y los expresa en una función de proporcionalidad directa de forma tabular, gráfica y simbólica.	$f(x) = kx$. Gráfica en plano cartesiano. Interpretación de k como precio unitario o tasa de cambio.
V	6.º	Establece relaciones entre datos de una situación de cambio y los expresa en una función lineal de forma tabular, gráfica y simbólica, e interpreta los valores.	$f(x) = mx + b$. Pendiente m como tasa de cambio. Lectura e interpretación de gráficas con derivada informal.

4.3 Evidencias de aprendizaje

GRADO	¿QUÉ PRODUCE EL ESTUDIANTE?	¿CÓMO LO DEMUESTRA?
1.º y 2.º	Tarjeta de patrón: secuencia de al menos 6 elementos con colores/formas y la regla escrita en palabras sencillas.	Explica oralmente: 'La regla es que siempre va primero ____ y luego ____'. Continúa el patrón dado por el docente.
3.º y 4.º	Tabla T de doble entrada con al menos 5 pares y la regla expresada con una operación.	Lee la tabla y dice la regla: 'Para saber el resultado, multiplico la entrada por ____'. Dibuja el diagrama de flechas.
5.º	Tabla de proporcionalidad + gráfica de puntos en papel cuadriculado + regla escrita como $f(x) = kx$.	Predice un valor no tabulado usando la regla. Explica por qué la gráfica pasa por el origen.
6.º	Tabla + gráfica en plano cartesiano + regla $f(x) = mx + b$ + interpretación escrita de m y b en el contexto real.	Calcula la pendiente entre dos puntos. Interpreta: '¿Qué significa m en este problema?' Identifica máximos y mínimos en la gráfica.

V. ENFOQUES TRANSVERSALES Y VALORES

ENFOQUE TRANSVERSAL	¿CÓMO SE REFLEJA EN ESTA UNIDAD?
Orientación al bien común	La situación de la feria escolar implica tomar decisiones que benefician a todos (biblioteca del colegio), no solo a unos pocos.
Igualdad de género	Todos los roles de la feria (vendedor, contador, diseñador de gráficas) son ejercidos indistintamente por niñas y niños. Los materiales usan nombres de ambos géneros.
Interculturalidad	Los ejemplos de la situación significativa incorporan productos y contextos propios de la región La Libertad (yuca, caña de azúcar, artesanía de Trujillo).
Desarrollo sostenible	Los materiales de taller son mayoritariamente de reciclaje. Se reflexiona sobre el desperdicio y el costo medioambiental de la producción en la feria.
Inclusión	Las actividades enactivas permiten la participación de estudiantes con distintas habilidades. Los diagramas visuales apoyan a quienes tienen dificultades con el texto escrito.

VI. SECUENCIA DIDÁCTICA — LOS TRES DÍAS

Estructura general de cada sesión:

Cada módulo sigue siempre la misma estructura: (1) Inicio con el reto de la feria escolar, (2) Actividades EIS — enactiva → icónica → simbólica—, (3) Cierre con reflexión y conexión al CNEB.

Los 4 procesos didácticos del CNEB están integrados: Problematicación → Búsqueda de estrategias → Socialización → Formalización.

DÍA 1 · MÓDULO 1

Del Producto Cartesiano a las Funciones

⌚ Aprox. 2.5 horas | CNEB: Regularidad, equivalencia y cambio · Cantidad

Propósito de la sesión:

Los estudiantes comprenden qué es una función como 'regla que conecta dos conjuntos de forma única', identifican dominio y rango, y conectan estos conceptos con los patrones y tablas de proporcionalidad de primaria.

Inicio — Problematicación (15 min)

La docente presenta el reto: 'En nuestra feria, cada producto tiene UN precio fijo por unidad. Si un producto cuesta S/3, ¿cuánto cuestan 1, 2, 3, 4, 5 unidades?' Los estudiantes responden oralmente. La docente pregunta: '¿Puede el mismo número de unidades tener DOS precios distintos?' Aquí nace la idea de función.

Desarrollo — Etapas EIS (90 min)

ENACTIVA (cuerpo en movimiento)	ICÓNICA (imagen/dibujo)	SIMBÓLICA (símbolo/fórmula)
Los estudiantes forman parejas: uno es el 'número de entrada' y otro el 'precio de salida'. Se paran en el espacio: si entras con el número 3, tu pareja debe pararse en el lugar del 9 ($\times 3$). La docente pregunta: '¿Puede el número 3 tener dos parejas distintas?' Si no puede $\rightarrow$ es función. Actividad 'La Máquina Humana': una caja de cartón grande con dos agujeros. Por un lado entran tarjetas con números, por el otro salen tarjetas con el resultado. Los demás advinan la regla.	Construyen una Tabla T en papel cuadriculado: columna 'Entrada (x)' y columna 'Precio (y)'. Completan 5 filas. Dibujan el diagrama de flechas entre dos óvalos (dominio $\rightarrow$ rango). Colorean el dominio de azul y el rango de verde. Grafican los pares ordenados en papel cuadriculado. Preguntan: ¿Los puntos forman una línea recta? ¿La línea pasa por el origen?	Escriben la regla: $f(x) = 3x$. Identifican: dominio = $\{1,2,3,4,5\}$, rango = $\{3,6,9,12,15\}$. Verifican: $f(4) = 12$. Preguntan: ¿Qué es k en $f(x) = kx$? ¿Qué representa en el contexto de la feria? Test del lápiz vertical: dibujan una función y una no-función. Aplican el test. Concluyen por escrito: 'f es función porque...'

GRADO	ACTIVIDAD CONCRETA	PREGUNTA GUÍA del docente	MATERIALES
1.º y 2.º	Patrón rojo-azul-rojo-azul: continúan la secuencia con tapas de botellas coloreadas.	<i>¿Cuál tapa va en el lugar? ¿Cómo lo sabes? ¿Siempre hay una sola respuesta?</i>	Tapas de botellas (rojo/azul), cartulina.
3.º y 4.º	Tabla del 3: llenan una Tabla T con entradas 1-10 y salidas multiplicadas por 3.	<i>¿La regla siempre da el mismo resultado para el mismo número? ¿Eso la hace función?</i>	Fichas de cartón, papel cuadriculado A4.
5.º	Mercadito: calculan el precio de 1 a 8 unidades de su producto. Grafican en papel cuadriculado.	<i>¿La gráfica pasa por el origen? ¿Qué significaría que NO pasara?</i>	Papel cuadriculado A4, regla, fichas de precio.
6.º	Dos productos: uno con $f(x) = 2x$ y otro con $f(x) = 2x + 5$ (costo de delivery). Grafican ambas.	<i>¿Por qué una línea pasa por el origen y la otra no? ¿Qué representa el 5 en la segunda?</i>	Papel cuadriculado A3, plumones de colores, regla.

Cierre — Reflexión y formalización (15 min)

Pregunta de cierre: '¿Qué tienen en común una tabla de precios, la tabla de multiplicar y una gráfica de puntos en línea recta?' Los estudiantes responden en tarjetas. La docente formaliza: todos son funciones lineales. Conecta con el CNEB: 'Esto es exactamente lo que enseñarán en 5.º y 6.º grado'.

DÍA 1 · MÓDULO 2

Álgebra y Composición de Funciones

🕒 Aprox. 2 horas | CNEB: Regularidad, equivalencia y cambio · Cantidad

Propósito de la sesión:

Los estudiantes comprenden la composición de funciones como 'cadena de reglas', la función inversa como 'deshacer', y la proporcionalidad directa e inversa, conectando todo con las operaciones en cadena de primaria.

Inicio — Problematización (10 min)

La docente plantea: 'El precio de fabricar un producto se calcula así: primero multiplica el costo del material por 2 (función g), luego suma $S/3$ de ganancia (función f). ¿Cuánto cuesta producir si el material cuesta $S/5$?' Los estudiantes calculan en grupo.

Desarrollo — Etapas EIS (80 min)

ENACTIVA (cuerpo en movimiento)	ICÓNICA (imagen/dibujo)	SIMBÓLICA (símbolo/fórmula)
Dos 'máquinas humanas' en fila: el primer grupo aplica la regla $\times 2$ (g), el segundo aplica $+3$ (f). Una tarjeta entra en la primera máquina, el resultado pasa a la segunda. Los demás registran los valores. Juego del 'Deshacer': si la máquina g aplicó $\times 2$, la máquina inversa g^{-1} aplica $\div 2$. Un grupo deshace lo que hizo el otro. El resultado final debe ser el número de partida.	Diagrama de flujo en papel: número $\rightarrow [\times 2] \rightarrow$ resultado parcial $\rightarrow [+3] \rightarrow$ resultado final. Flechas de colores. Tabla de tres columnas: x $g(x)$ $f(g(x))$. Dos tablas lado a lado: una de proporcionalidad directa (razón constante) y una de proporcionalidad inversa (producto constante). Los estudiantes identifican cuál es cuál.	Escriben: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2x + 3$. Calculan para $x = 5$: $g(5) = 10$, $f(10) = 13$. Verifican con la tabla. Escriben: $y = kx$ (directa, $k =$ razón) y $y = k/x$ (inversa, $k =$ producto). Calculan k en sus propios datos de la feria.

GRADO	ACTIVIDAD CONCRETA	PREGUNTA GUÍA del docente	MATERIALES
1.º y 2.º	Cadena de transformaciones: 'dobla el número, luego súmale 1'. Fichas con números del 1 al 5.	<i>¿Qué le pasó al número? ¿Puedes deshacer la cadena para volver al inicio?</i>	Fichas numéricas, tabla sencilla en hoja bond.
3.º y 4.º	Operaciones inversas: si $\times 4$ para ir de 3 a 12, $\div 4$ para volver de 12 a 3. Completar tabla de 'ida y vuelta'.	<i>¿Siempre puedes deshacer? ¿Qué operación es la inversa de multiplicar por 4?</i>	Fichas numéricas, papel cuadriculado A4.
5.º	Regla de tres directa: tabla de precio de tela (S/8 por metro). Calcular 3.5 m, 7 m. Graficar.	<i>¿La razón precio/metro es siempre la misma? ¿Eso qué tipo de proporcionalidad es?</i>	Papel cuadriculado, regla, datos del mercado.
6.º	Comparar directa e inversa: velocidad $\times$ tiempo = distancia constante (inversa) vs precio $\times$ cantidad (directa). Graficar ambas.	<i>¿Cómo sabes cuál es directa y cuál inversa sin ver la gráfica? ¿Qué pasa con el producto $x \cdot y$?</i>	Papel cuadriculado A3, calculadora, plumones.

Cierre — Reflexión y formalización (10 min)

Conexión con primaria: 'Cuando un niño de 3.º resuelve: el triple de un número y luego le resto 2 — está aplicando composición. La regla de tres de 5.º es proporcionalidad directa. La distribución de útiles entre grupos es proporcionalidad inversa. Ahora lo sabéis formalmente.'

DÍA 2 · MÓDULO 3

Límite — La Tendencia Detrás de los Datos

⌚ Aprox. 2 horas | CNEB: Regularidad y cambio · Gestión de datos

Propósito de la sesión:

Los estudiantes comprenden que el límite es 'el valor hacia donde tiende una función', distinguen los límites laterales, e identifican asíntotas. Conectan este razonamiento con la lectura de tendencias en gráficas estadísticas de primaria.

Inicio — Problemатización (10 min)

La docente muestra una gráfica de ventas de la feria escolar con una tendencia que se aplanа. Pregunta: '¿A cuántas ventas diarias llegará esta feria si sigue creciendo? ¿Seguirá creciendo para siempre o hay un máximo?' Este es el punto de entrada al concepto de límite.

Desarrollo — Etapas EIS (80 min)

ENACTIVA (cuerpo en movimiento)	ICÓNICA (imagen/dibujo)	SIMBÓLICA (símbolo/fórmula)
Actividad 'Caminar hacia la pared': los estudiantes caminan hacia una pared pero se detienen a 1 metro, luego a 50 cm, luego a 25 cm... cada vez más cerca pero sin tocarla. La pared ES el límite. El 'termómetro humano': una fila de estudiantes a distintas alturas representando temperaturas a lo largo del día. Identifican visualmente a qué temperatura 'tiende' la tarde.	Gráfica de una función que se acerca a una línea horizontal: los estudiantes trazan la asíntota con plumón rojo. '¿La gráfica toca esta línea alguna vez?' Tabla de valores donde x va creciendo (1, 10, 100, 1000): los estudiantes calculan $f(x) = 1/x$ y observan que se acerca a 0 sin llegar.	Notación: $\lim_{x \rightarrow \infty} 1/x = 0$. Asíntota horizontal: $y = 0$. Límites laterales: aproximar desde la derecha ($x \rightarrow 3^+$) y desde la izquierda ($x \rightarrow 3^-$) en una gráfica con salto. Regla del límite: existe solo si $\lim$ derecho = $\lim$ izquierdo. Calculan y concluyen en cada caso.

GRADO	ACTIVIDAD CONCRETA	PREGUNTA GUÍA del docente	MATERIALES
1.º y 2.º	Secuencia que se acerca: 10, 5, 2.5, 1.25... '¿A qué número nos acercamos?'	¿Llegará alguna vez a cero? ¿O solo se acerca?	Fichas con números, papel bond.
3.º y 4.º	Gráfica de barras de temperatura semanal. Trazan la 'línea de tendencia' con regla.	¿En qué semana la temperatura parece estabilizarse? ¿Hacia qué valor tiende?	Gráficas impresas, regla, plumón rojo.
5.º	Gráfica de ventas con tendencia. Extienden la línea y predicen: '¿Cuántas ventas en la semana 10?'	Si la tendencia continúa, ¿hay un máximo? ¿Puede vender infinito?	Papel cuadriculado A4, datos impresos, regla.
6.º	Tabla de $f(x)=1/x$ para x grandes. Grafican. Identifican asíntota horizontal y vertical.	¿Qué pasa si $x = 0$? ¿Podemos dividir entre cero? ¿Qué significa eso en la gráfica?	Papel cuadriculado A3, GeoGebra si hay acceso.

Cierre — Reflexión y formalización (10 min)

Reflexión: 'Cuando en una gráfica de 4.º preguntas: ¿hacia dónde va esta tendencia?, estás usando razonamiento de límite. No necesitas la notación formal, pero el pensamiento es el mismo. Eso es lo que estamos formalizando hoy.'

DÍA 2 · MÓDULO 4

Continuidad — ¿Por qué Algunas Gráficas Tienen Saltos?

🕒 Aprox. 2 horas | CNEB: Regularidad y cambio · Gestión de datos

Propósito de la sesión:

Los estudiantes comprenden los tres tipos de discontinuidad, el Teorema del Valor Intermedio, y los conectan con la lectura crítica de gráficas estadísticas en primaria.

Inicio — Problemатización (10 min)

La docente muestra dos gráficas: la temperatura durante el día (continua, sin saltos) y el precio del producto de la feria con descuento por volumen (salto abrupto al cruzar 10 unidades). Pregunta: '¿Por qué una gráfica es suave y la otra tiene un salto? ¿Afecta eso cómo la lees?'

Desarrollo — Etapas EIS (80 min)

ENACTIVA (cuerpo en movimiento)	ICÓNICA (imagen/dibujo)	SIMBÓLICA (símbolo/fórmula)
Actividad 'El camino sin huecos': los estudiantes forman un 'camino humano' (continuo). Luego uno se sienta y hay un 'hueco' (discontinuidad evitable). Luego un grupo salta a otra altura (discontinuidad de salto). Juego del TVI: 'ayer hacía 15°C, hoy hace 28°C. ¿En algún momento del día hizo exactamente 20°C?' Los estudiantes votan. Discuten por qué la respuesta es siempre Sí si la temperatura es continua.	Dibujan las 3 discontinuidades en papel: hueco (evitable), salto (de salto), explosión (esencial). Colorean con código de colores. Gráficas estadísticas reales: datos de temperatura de Trujillo. Identifican si hay 'huecos' o 'saltos' y los clasifican.	Condiciones de continuidad en $x=a$: (1) $f(a)$ existe, (2) $\lim$ existe, (3) son iguales. Verifican en ejemplos concretos. Enuncian el TVI con sus palabras: 'Si la función es continua en $[a,b]$, toma todos los valores intermedios'. Aplican a tres situaciones cotidianas.

GRADO	ACTIVIDAD CONCRETA	PREGUNTA GUÍA del docente	MATERIALES
1.º y 2.º	Gráfica del clima del día con una barra faltante. '¿Qué pasó ese día?' Estiman el valor.	<i>Si a las 8am hacía 18º y a las 12m hacía 26º, ¿en algún momento hizo 22º? ¿Cómo lo sabes?</i>	Gráficas simples impresas, lápices de color.
3.º y 4.º	Gráfica de asistencia escolar. Identifican días con datos faltantes o saltos inusuales.	<i>¿Hay días con datos 'raros'? ¿Qué pudo haber pasado? ¿Es un error o una discontinuidad real?</i>	Datos de asistencia impresos, papel cuadriculado.
5.º	Precio con descuento: grafica $f(x) = 5$ si $x \leq 10$ y $f(x) = 3$ si $x > 10$. Identifican el salto.	<i>¿Por qué hay un salto en $x=10$? ¿Es un error del gráfico o refleja algo real?</i>	Papel cuadriculado A4, plumones de colores.
6.º	Análisis completo: clasifican discontinuidades en 4 gráficas distintas. Justifican por escrito.	<i>¿Cuál discontinuidad puede 'repararse'? ¿Cuál no? ¿Qué contexto real justifica un salto?</i>	Papel cuadriculado A3, GeoGebra si hay acceso.

Cierre (10 min)

Plenaria: Cada grupo explica un tipo de discontinuidad con un ejemplo de la feria escolar. La docente cierra: 'Leer si una gráfica tiene saltos o no es una competencia del CNEB desde 4.º grado. Ahora tenéis la base conceptual para enseñarlo bien.'

DÍA 3 · MÓDULO 5

Derivada — ¿Cuándo Estamos Ganando Más?

⌚ Aprox. 2.5 horas | CNEB: Cantidad · Regularidad y cambio · Gestión de datos

Propósito de la sesión:

Los estudiantes comprenden la derivada como 'tasa de cambio instantánea', aplican la regla de la potencia, identifican funciones crecientes/decrecientes y encuentran máximos y mínimos. Conectan con la lectura de variaciones en tablas de primaria.

Inicio — Problemатización (15 min)

La docente muestra una tabla de ganancias horarias de la feria: Hora 1: S/20, Hora 2: S/35, Hora 3: S/45, Hora 4: S/48, Hora 5: S/44. Pregunta: '¿En qué hora ganamos más por cada hora adicional trabajada? ¿Las ganancias siempre aumentan? ¿Hay un momento donde es mejor cerrar?' Esta es la puerta de entrada a la derivada.

Desarrollo — Etapas EIS (100 min)

ENACTIVA (cuerpo en movimiento)	ICÓNICA (imagen/dibujo)	SIMBÓLICA (símbolo/fórmula)
Actividad 'Caminar más rápido o más lento': los estudiantes caminan por el aula a distintas velocidades. Lento = función que crece poco. Rápido = función que crece mucho. Detenidos = máximo o mínimo. Observan y registran. El 'Termómetro Humano': fila de estudiantes a distintas alturas representando temperaturas. Identifican el máximo (persona más alta), el mínimo (más baja) y los tramos que suben/bajan.	Construyen una tabla con columna extra 'variación' ($\Delta y = y_{\text{actual}} - y_{\text{anterior}}$). Colorean en verde las variaciones positivas (crece) y en rojo las negativas (decrece). Grafican la función de ganancias en papel cuadriculado. Trazan la recta tangente en cada punto con una regla. Comparan inclinaciones: ¿cuándo es más inclinada?	Calculan la tasa de cambio promedio entre horas consecutivas: $TCP = \Delta y / \Delta x$. Identifican en qué hora fue mayor. Regla de la potencia: $f(x) = x^2 \rightarrow f'(x) = 2x$. Verifican: en $x=3$, la pendiente es $2 \times 3 = 6$. Comparan con la pendiente visual en la gráfica.

GRADO	ACTIVIDAD CONCRETA	PREGUNTA GUÍA del docente	MATERIALES
1.º y 2.º	'¿Cuánto más?' entre valores consecutivos: 3, 5, 8, 12. Diferencias: +2, +3, +4. ¿Crece más rápido?	<i>¿Las diferencias son siempre iguales? ¿Van creciendo o decreciendo?</i>	Semillas para contar, fichas de cartón.
3.º y 4.º	Tabla de crecimiento de planta: altura por semana. Columna de diferencias. ¿En qué semana creció más?	<i>¿Hubo alguna semana donde no creció? ¿Cómo lo sabes con la tabla?</i>	Datos de planta impresos, papel cuadriculado.

5.º	Tasa de cambio promedio: $TCP = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$ en datos reales de temperatura.	<i>¿En qué período cambió más rápido la temperatura? ¿Cómo lo ves en la tabla? ¿Y en la gráfica?</i>	Datos de clima de Trujillo, papel cuadriculado A4.
6.º	$f'(x)$ para polinomios simples. Identificar máximos/mínimos. Interpretar: '¿cuándo fue el pico de ventas?'	<i>Si $f'(x) > 0$, ¿qué pasa con las ventas? Si $f'(x) = 0$, ¿qué acaba de ocurrir?</i>	Papel A3, GeoGebra, plumones de colores.

Cierre (15 min)

Optimización en la feria: 'Usando la derivada, determinamos que el pico de ganancias ocurre en la hora 4. A partir de la hora 5, las ganancias bajan. La decisión óptima es cerrar después de la hora 4.' Los estudiantes escriben en su ficha: '¿Cómo explicarías a un niño de 6.º cuándo están en el máximo de algo?'

DÍA 3 · MÓDULO 6

Gráficas — Cómo Leer e Interpretar Visualmente

⌚ Aprox. 2 horas | CNEB: Gestión de datos · Forma y movimiento

Propósito de la sesión:

Los estudiantes realizan el análisis completo de una gráfica (dominio, rango, crecimiento, extremos, inflexión, asíntotas), distinguen concavidades y formulan preguntas pedagógicas para distintos grados de primaria.

Inicio — Problemатización (10 min)

La docente muestra la gráfica completa de ganancias de la feria a lo largo del día. Pregunta: '¿Qué historia cuenta esta gráfica? ¿Cuándo fue el momento de más ganancias? ¿Hubo algún momento donde las ganancias crecían cada vez más rápido? ¿Y donde frenaban?' Cada pregunta corresponde a un concepto del módulo.

Desarrollo — Etapas EIS (80 min)

ENACTIVA (cuerpo en movimiento)	ICÓNICA (imagen/dibujo)	SIMBÓLICA (símbolo/fórmula)
Actividad 'Somos la gráfica': se trazan ejes en el suelo con cinta. Cada estudiante es un punto. Señalan con el brazo la pendiente en su posición (arriba = positiva, horizontal = cero, abajo = negativa). El grupo identifica máximos y mínimos. Código de colores en la gráfica: verde = tramo creciente, rojo = tramo decreciente, círculo amarillo = máximo o mínimo, triángulo morado = punto de inflexión.	Dibujan una gráfica de tipo U (cuenco) y una de tipo $\cap$ (arco). Identifican: en U las pendientes crecen $\rightarrow$ crecimiento acelerado. En $\cap$ las pendientes decrecen $\rightarrow$ crecimiento frenado. Con GeoGebra (si hay acceso) o papel A3: grafican $f(x) = x^3 - 3x$ y su derivada $f'(x) = 3x^2 - 3$. Observan la relación: donde f tiene máximo, $f' = 0$.	Análisis completo por escrito: dominio $\mathbb{R}$, rango, intervalos creciente/decreciente, máximos con coordenadas, punto de inflexión, asíntotas. Preguntas pedagógicas: cada estudiante formula 3 preguntas sobre la gráfica para su grado asignado (1-2, 3-4, 5-6). Intercambian y evalúan la pertinencia.

GRADO	ACTIVIDAD CONCRETA	PREGUNTA GUÍA del docente	MATERIALES
1.º y 2.º	Pictograma de frutas favoritas. '¿Cuál es la más elegida? ¿Cuál la menos?'	<i>¿Cómo lo sabes sin contar? ¿Qué parte de la gráfica miras primero?</i>	Pictogramas impresos, lápices de colores.
3.º y 4.º	Gráfica de barras de asistencia. Colorear en verde las barras más altas que la anterior.	<i>¿En qué días subió la asistencia? ¿En qué días bajó? ¿Hubo días iguales?</i>	Datos de asistencia, plumones verde y rojo.
5.º	Gráfica lineal de ventas. Trazar la recta tangente en distintos puntos con regla.	<i>¿En qué punto es más inclinada la recta tangente? ¿Qué significa eso en términos de ventas?</i>	Papel cuadriculado A4, regla, plumón.

6.º	Análisis completo de una gráfica cúbica. Identificar los 7 elementos del protocolo.	<i>¿Dónde está el punto de inflexión? ¿Cómo cambia la 'curva' de la gráfica en ese punto?</i>	Papel cuadriculado A3, GeoGebra, plumones.
-----	---	---	--

Cierre (10 min)

Galería de gráficas: cada grupo pega su gráfica analizada en la pared. Los demás hacen observaciones con post-its. La docente cierra: 'Saber leer una gráfica es saber hacer preguntas. Hoy aprendieron las preguntas que hay que hacer.'

CONCLUSIONES

La presente propuesta sostiene, con base en la literatura revisada, que el enfoque de las etapas cognitivas Enactiva, Icónica y Simbólica (EIS) de Jerome Bruner (1966) constituye una base cognitiva sólida y pertinente para la enseñanza del pensamiento matemático en la formación inicial de docentes de Educación Primaria. Al articular contenidos de Cálculo —relaciones, funciones, límite, continuidad y derivada— con las competencias, capacidades y desempeños del Currículo Nacional de Educación Básica (CNEB) del Perú, la guía tiende un puente entre la matemática superior y la práctica pedagógica del aula, permitiendo que el futuro docente comprenda el fundamento matemático de contenidos que enseñará en los seis grados de primaria.

La progresión EIS —de la acción corporal a la representación icónica y, finalmente, al lenguaje simbólico— opera en esta propuesta como un principio rector no optativo: ningún concepto matemático debería presentarse de forma simbólica sin haber transitado antes por la experiencia concreta y visual. Este principio, aplicado de manera sistemática a lo largo de los siete módulos y las tres jornadas de trabajo, ofrece a los docentes en formación un modelo replicable para el diseño de sus propias secuencias didácticas.

El uso deliberado de materiales de bajo costo, mayoritariamente de reciclaje, evidencia que la calidad didáctica no depende de recursos costosos, sino de un diseño pedagógico intencional. Asimismo, la integración final en una Unidad de Aprendizaje articulada con el CNEB —con situación significativa, evidencias, criterios e instrumentos de evaluación formativa— demuestra la aplicabilidad directa de la propuesta en la práctica pre-profesional del futuro docente de primaria.

Se recomienda validar empíricamente esta propuesta en futuras investigaciones, mediante su implementación con muestras de docentes en formación, así como explorar su extensión a otras áreas de la matemática escolar y a otros niveles de la Educación Básica Regular.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Ausubel, D. P. (2002). Adquisición y retención del conocimiento: una perspectiva cognitiva. Paidós.
- Anda Gaibor, C., & Medina Chicaiza, P. (2024). Geogebra basado en el modelo de aceptación tecnológica para el aprendizaje matemático. *Conocimiento Global*, 9(2), 12-26. <https://doi.org/10.70165/cglobal.v9i2.381>
- Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*. Harvard University Press.
- Calle, L. (2021). El método Singapur en el aprendizaje de las fracciones en la asignatura de matemáticas en niños y niñas de sexto grado del segundo bimestre de primaria en la Unidad Educativa "República del Japón A", en la ciudad de El Alto [Tesis de maestría, Universidad Mayor de San Andrés]. Repositorio UMSA. <https://repositorio.umsa.bo/bitstream/handle/123456789/25514/T-1383.pdf>
- Campos, L. (2020). Método Singapur y resolución de problemas en discentes de segundo grado de primaria del colegio parroquial, La Victoria, 2022 [Tesis de maestría, Universidad César Vallejo]. Repositorio UCV. https://repositorio.ucv.edu.pe/bitstream/handle/20.500.12692/94774/Campos_ALC-SD.pdf
- Coy García, G., Fuel Bermeo, A., Durán Pardo, V., & Coloma Añazco, J. (2024). La inteligencia artificial aplicada a la enseñanza de la matemática. *Conocimiento Global*, 9(1), 234-242. <https://doi.org/10.70165/cglobal.v9i1.357>
- Fonseca, V. G. d., & Henriques, A. C. C. B. (2023). Pre-service mathematics teachers using GeoGebra to learn about instantaneous rate of change. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 54(4), 534-556. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1958942>
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Kluwer Academic Publishers.
- GeoGebra. (2024). *GeoGebra — Matemática para todos* [Software educativo libre]. GeoGebra GmbH. <https://www.geogebra.org>
- Kim, Y. R., Park, M. S., & Joung, E. (2026). Exploring the integration of artificial intelligence in math education: Preservice teachers' experiences and reflections on problem-posing activities with ChatGPT. *School Science and Mathematics*, 126(1), 9-23. <https://doi.org/10.1111/ssm.18336>
- Kurniawan, H., Budiyo, Sajidan, & Siswandari. (2020). Concrete-pictorial-abstract approach on student's motivation and problem solving performance in Algebra. *Universal Journal of Educational Research*, 8(7), 3204-3212.
- Leong, Y. H., Ho, W. K., & Cheng, L. P. (2015). Concrete-Pictorial-Abstract: Surveying its origins and charting its future. *The Mathematics Educator*, 16(1), 1-18.
- Lutfi, J. S., & Dasari, D. (2024). Research trends on learning mathematics with the CPA (Concrete-Pictorial-Abstract) approach. *PRISMA*, 13(1), 103-112.
- Ministerio de Educación del Perú. (2016). *Currículo Nacional de la Educación Básica*. MINEDU. <https://www.minedu.gob.pe/curriculo/>
- Ministerio de Educación del Perú. (2019). *Programa Curricular de Educación Primaria*. MINEDU.
- Ministerio de Educación del Perú. (2022). *Fichas de trabajo de matemática, 1.º a 6.º grado de primaria* [Serie de materiales educativos]. MINEDU.
- Organización Mundial de la Salud. (2006). *Patrones de crecimiento infantil de la OMS: longitud/estatura para la edad y peso para la edad* [Estándares de referencia]. OMS. <https://www.who.int/childgrowth/standards/es/>
- Piaget, J. (1971). *The theory of stages in cognitive development*. McGraw-Hill.
- Ruiz Muñoz, G., Romero Amores, N., Vasco Delgado, J., & Paucar Moreno, J. (2024). Explorando el potencial del metaverso en entornos educativos inmersivos: un estudio sobre la integración de la realidad virtual en el aula. *Conocimiento Global*, 9(1), 321-333. <https://doi.org/10.70165/cglobal.v9i1.370>
- Slavičková, M., & Vargová, M. (2018). Functional thinking of future mathematics teachers. En L. Gómez Chova, A. López Martínez, & I. Candel Torres (Eds.), *ICERI2018 Proceedings* (pp. 2028-2036). IATED Academy.

- Slavičková, M., & Vargová, M. (2023). Differences in the comprehension of the limit concept between prospective mathematics teachers and managerial mathematicians during online teaching. En G. Fulantelli, D. Burgos, G. Casalino, M. Cimitile, G. Lo Bosco, & D. Taibi (Eds.), *Higher Education Learning Methodologies and Technologies Online (HELMeTO 2022)*. Communications in Computer and Information Science, vol. 1779. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-29800-4_13
- Toh, T. L., Toh, P. C., Teo, K. M., & Zhu, Y. (2022). On pre-service teachers' content knowledge of school calculus: An exploratory study. *European Journal of Mathematics and Science Education*, 3(2), 91–103.
- Vargas González, M. F., Fernández-Plaza, J. A., & Ruiz Hidalgo, J. F. (2023). Pre-service teachers' understanding of the derivative of a function at a point. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 54(4), 483–510. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1957504>
- Walkington, C. (2026). The implications of generative artificial intelligence for mathematics education. *School Science and Mathematics*, 126(1), 3–8. <https://doi.org/10.1111/ssm.18356>
- Wilkie, K. J. (2014). Upper primary school teachers' mathematical knowledge for teaching functional thinking in algebra. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 17(5), 397–428.
- Zapatera, A. (2020). El método Singapur para el aprendizaje de las matemáticas: enfoque y concreción de un estilo de aprendizaje. https://dehesa.unex.es/bitstream/10662/13097/1/0214-9877_2020_2_1_263.pdf

Formación del **Pensamiento Matemático** en Docentes de Educación Primaria:

Una Propuesta Didáctica desde los Fundamentos del Cálculo
y las Etapas Cognitivas Enactiva-Icónica-Simbólica (EIS)

SINOPSIS

¿Cómo lograr que un futuro docente de primaria enseñe matemática con seguridad y sentido, en lugar de repetir fórmulas que no comprende? Esta guía didáctica responde a esa pregunta desde una propuesta tan rigurosa como aplicable: llevar los fundamentos del Cálculo —funciones, límite, continuidad y derivada— hasta el aula de primaria, transitando siempre por las tres etapas cognitivas de Jerome Bruner: la acción corporal (enactiva), la representación visual (icónica) y el lenguaje matemático formal (simbólica).

Organizada en tres jornadas de trabajo y siete módulos temáticos, la obra articula cada secuencia didáctica con las competencias, capacidades y desempeños del Currículo Nacional de Educación Básica (CNEB) del Perú, del 1.º al 6.º grado de primaria. Incluye listas de materiales educativos de bajo costo y mayoritariamente reciclables, pensadas para que el taller sea replicable en cualquier institución educativa del país, y culmina con el diseño guiado de una Unidad de Aprendizaje completa.

Un principio recorre todo el texto: ningún concepto matemático debería presentarse en forma simbólica sin haber pasado antes por el cuerpo y la imagen. Esta obra ofrece a los docentes en formación —y a sus formadores— una herramienta que tiende un puente entre la matemática superior y la práctica real del aula, contribuyendo a mejorar la enseñanza del pensamiento matemático en la educación primaria peruana.

DIRIGIDO A



Docentes en formación y en servicio de Educación Primaria, formadores de institutos y facultades de educación, y diseñadores curriculares interesados en la didáctica de la matemática.

AUTORES



Miluska Jackeline Madelaine Pajuelo Abanto



Anthony Joel Gonzáles Pacheco



Luis Alberto Colina Cueva



Áurea Elizabeth Rafael Sánchez



Joselito Moisés Luján Miguel



Marilú Rosario Cruz Blas

SOBRE LOS AUTORES



Los autores conforman un equipo interdisciplinario de docentes e investigadores de la Universidad Nacional de Trujillo (UNT), Perú, vinculados a los departamentos de Ciencias de la Educación

